

TRABAJO DE FIN DE GRADO



# ELECTRODINÁMICA EN RELATIVIDAD GENERAL, UN ENFOQUE GEOMÉTRICO

Presentado por  
Pau López Oliver

Tutor: José Antonio Pastor González

Grado en Física  
Facultad de Química  
**Universidad de Murcia**

11 de junio de 2024

# Agradecimientos

En primer lugar, quiero agradecer a mi tutor, Jose Antonio Pastor González, por brindarme la libertad de explorar este fascinante tema y por el tiempo dedicado a resolver mis innumerables dudas. Quiero agradecer a mis amigos por las memorias forjadas, los ánimos dados, por soportarme y por estar ahí. Todos ellos se merecen mucho más que una frase aunque, en particular, quiero agradecer a mis compañeros de piso (¡y de vida!) estos últimos años, los cuales han sido mi segunda familia. Finalmente, quiero agradecer a mi familia, por su cariño y apoyo incondicional. En especial, quiero dar las gracias a mis padres, a los que estoy eternamente agradecido, aunque ninguna palabra que yo pueda escribir aquí consiga expresar mi gratitud hacia ellos.

## Resumen

La electrodinámica clásica es una muy exitosa descripción matemática de los fenómenos electromagnéticos dentro del marco teórico de la relatividad especial. Sin embargo, al intentar describir conjuntamente el electromagnetismo y gravedad, surgen diversas inconsistencias. En el presente trabajo se explora la descripción del electromagnetismo en términos de formas diferenciales, la cual es inherentemente geométrica y encaja de manera natural dentro de la relatividad general. Del nuevo formalismo se obtiene un nuevo conjunto de ecuaciones de Maxwell a partir del principio de Hamilton y se muestra que se reducen a las ecuaciones típicas en el límite clásico.

## Abstract

Classical electrodynamics is a very successful mathematical description of electromagnetic phenomena in the framework of special relativity. However, when trying to jointly describe electromagnetism and gravity, several inconsistencies arise. The present work explores the differential form description of electromagnetic fields, which is inherently geometric and fits in a natural way within general relativity. In the new formalism, a new set of Maxwell equations is obtained from Hamilton's principle and is shown to reduce to the typical equations in the classical limit.

# Índice

<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
<b>2. Conceptos preliminares</b>	<b>2</b>
2.1. Geometría Lorentziana y Cálculo Exterior . . . . .	2
2.2. Grupo de Lorentz . . . . .	7
<b>3. Gravitación y Electromagnetismo</b>	<b>9</b>
3.1. Motivación . . . . .	9
3.2. Acción de Einstein-Hilbert. Lagrangianos geométrico y no geométrico . . . . .	10
3.3. Densidad Lagrangiana electromagnética . . . . .	10
3.3.1. 4-forma Lagrangiana electromagnética . . . . .	12
3.4. Deducción de las Ecuaciones de Maxwell . . . . .	14
3.5. Ecuaciones de Einstein-Maxwell. Interacción electrogravitatoria. . . . .	15
3.6. Límite clásico . . . . .	18
<b>4. Aplicaciones y Conclusiones</b>	<b>20</b>
†. <b>Apéndices</b>	<b>21</b>
A. Demostración del Teorema 2.29 . . . . .	21
B. La invarianza Lorentz implica curvatura nula. . . . .	24
C. Detalle en el cálculo de las Ecuaciones de Maxwell . . . . .	26
D. Cálculos de variaciones explícitos para la acción de Einstein-Hilbert . . . . .	28
D.1. Conexión afín . . . . .	28
D.2. Curvatura escalar . . . . .	28
D.3. Determinante de la métrica . . . . .	30
D.4. Lagrangiano electromagnético . . . . .	31

# 1. Introducción

Antes del siglo XX, el entendimiento de la gravedad y el electromagnetismo estaba basado en los mismos conceptos, ya que ambas eran teorías de campos clásicas en  $\mathbb{R}^3$ . Por un lado, el electromagnetismo estaba gobernado por las ecuaciones de Maxwell,

$$\nabla \cdot \vec{E} = \rho/\epsilon_0, \quad (1.1)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0, \quad (1.2)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\partial_t \vec{B}, \quad (1.3)$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \left( \vec{J} + \epsilon_0 \partial_t \vec{E} \right), \quad (1.4)$$

las cuales describen la evolución temporal de los campos eléctrico,  $\vec{E}$  y magnético  $\vec{B}$ , con  $\vec{E}, \vec{B} \in \mathbb{R}^3$ . Se define  $\rho$  como la densidad de carga eléctrica,  $\vec{J}$  la densidad de corriente,  $\epsilon_0$  la permitividad eléctrica del vacío y  $\mu_0$  la permeabilidad magnética del vacío. Estas ecuaciones no rigen como interaccionan los campos con la materia, es decir la fuerza que ejercen sobre las partículas cargadas (susceptibles a  $\vec{E}$  y  $\vec{B}$ ), por tanto se también se postula la fuerza de Lorentz:

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \quad (1.5)$$

Por otro lado, la gravedad Newtoniana venía descrita por otro campo vectorial  $\vec{g} \in \mathbb{R}^3$  que verifica

$$\vec{g} = -\vec{\nabla}\Phi \iff \vec{\nabla} \cdot \vec{g} = -\nabla^2\Phi = 4\pi G\rho_m, \quad (1.6)$$

dónde  $G$  es la constante de gravitación universal,  $\rho_m$  es la densidad de masa y  $\Phi$  es el potencial gravitatorio. El caso de la interacción del campo gravitatorio con la materia es especial, ya que la masa que provoca el campo (masa gravitatoria activa,  $m_{AG}$ ) es conceptualmente la misma masa que sufre el campo (masa gravitatoria pasiva,  $m_{PG}$ ) y la que aparece en la mecánica Newtoniana (masa inercial,  $m_I$ )<sup>1</sup>, hecho que se conoce como el principio de equivalencia Newtoniano. La fuerza es simplemente  $\vec{F}_g = m\vec{g} = m\vec{a}$ , por tanto  $\vec{g} = \vec{a}$ . Considerar ambos fenómenos simultáneamente consiste en resolver el sistema de ecuaciones diferenciales acoplado constituido por (1.1)-(1.4) y (1.6) dando lugar a los campos  $\vec{g}$ ,  $\vec{E}$  y  $\vec{B}$ . Estos dan lugar a fuerzas, que, junto con las leyes de Newton nos permiten describir el movimiento del sistema.

No obstante, sabemos que la gravedad Newtoniana tiene un régimen de validez limitado, ya que no predice fenómenos como la precesión del perihelio de la órbita de Mercurio o las lentes gravitatorias, los cuales son correctamente descritos por la teoría de la Relatividad General [4]. Además, esta formulación es inconsistente, (como se demuestra en rigor en la sección §3.1). La idea subyacente es que el electromagnetismo clásico es una teoría dentro del régimen de la relatividad especial, la cual es incompatible con la gravedad. Esto es debido a que surgen inconsistencias al acoplar gravedad clásica en relatividad especial, comenzando porque la expresión (1.6) no es invariante bajo transformaciones de Lorentz. Además, se puede demostrar que la existencia de *redshift* gravitacional, el cual es observado experimentalmente, conlleva que una teoría de la gravedad consistente no puede ser construida en relatividad especial [14] [4].

Con esto en mente, se utilizan las formas diferenciales para reformular el electromagnetismo en el marco de la relatividad general como una teoría clásica de campos. No solamente cambiamos su contenido físico, sino también en el formalismo matemático usado, el cálculo exterior, el cual generaliza los conceptos de integración y derivación a variedades diferenciales que describen el espacio-tiempo juntando electromagnetismo y gravitación con elegancia. Se concluye el trabajo comprobando que la nueva formulación se reduce a la clásica en espacio-tiempos planos.

<sup>1</sup>La equivalencia  $m_{AG} = m_{PG} = m_I$  ha sido corroborada con una precisión del orden de  $10^{-15}$  [17].

## 2. Conceptos preliminares

Esta primera sección se dedica a introducir las herramientas matemáticas que se necesitan para desarrollar la física. Concretamente, se introduce el cálculo exterior, la herramienta fundamental usada en la reformulación del electromagnetismo y el grupo de Lorentz. Aunque muchas demostraciones se omiten, pueden ser encontradas en la bibliografía proporcionada.

### 2.1. Geometría Lorentziana y Cálculo Exterior

En este apartado se sigue principalmente [19], [4], [3], junto a resultados de [7], [8], [6] y [11].

**Definición 2.1. (Espacio de Hausdorff).** Sea  $X$ , un espacio topológico y  $x, y \in X$  con  $x \neq y$ . Se dice que  $X$  es un espacio de Hausdorff si se puede separar por entornos, esto es, existen entornos  $U$  de  $x$  y  $V$  de  $y$  tal que  $U \cap V = \emptyset$ .

**Definición 2.2. (Carta, atlas).** Sean  $\mathcal{M}$  un espacio topológico y  $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{M}$ ,  $V \subseteq \mathbb{R}^n$  conjuntos abiertos. El homeomorfismo  $\phi: \mathcal{U} \rightarrow V$ ,  $\phi(u) = (x_1(u), \dots, x_n(u))$  es un *sistema de coordenadas* sobre  $\mathcal{U}$  y  $\phi^{-1}$  una *parametrización* de  $\mathcal{U}$ . El par  $(\mathcal{U}, \phi)$  es una *carta*. Llamamos *atlas* a una familia de cartas  $\Phi = \{(\mathcal{U}_\alpha, \phi_\alpha)\}$  tal que  $\{\mathcal{U}_\alpha\}$  cubre  $\mathcal{M}$  y los homeomorfismos  $\phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1}: \phi_\alpha(\mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta) \rightarrow \phi_\beta(\mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta)$  (*cambios de coordenadas*) son de clase  $C^\infty$ .

**Definición 2.3. (Estructura diferencial).** Una estructura diferencial  $\Omega$  sobre  $\mathcal{M}$  es un atlas maximal, es decir, si  $\Phi$  es un atlas arbitrario sobre  $\mathcal{M}$  y  $(\mathcal{U}_\alpha, \phi_\alpha) \in \Phi$ , entonces  $(\mathcal{U}_\alpha, \phi_\alpha) \in \Omega$ .

**Definición 2.4. (Variedad diferencial).** Sea  $\mathcal{M}$  un espacio de Hausdorff 2AN (es decir, existe base numerable) que admita una estructura diferencial  $\Omega$  tal que todas las cartas en  $\Omega$  lleven a  $\mathbb{R}^n$ . Entonces,  $\mathcal{M}$  es una *n-variedad diferencial*.

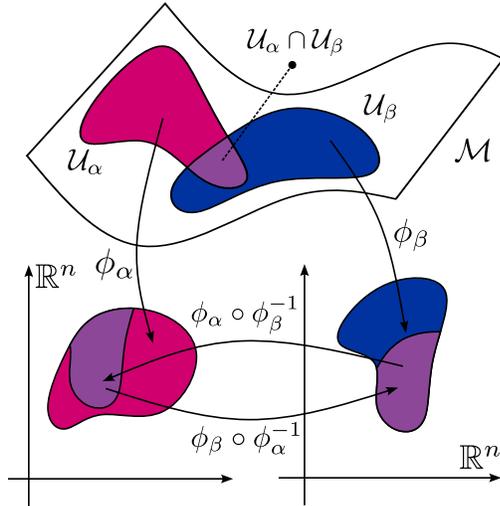


Figura 1: Dos cartas  $(\mathcal{U}_\alpha, \phi_\alpha)$  y  $(\mathcal{U}_\beta, \phi_\beta)$  de a un atlas de la variedad  $\mathcal{M}$  y los cambios de coordenadas entre ellas.

Intuitivamente, una n-variedad diferencial es un espacio topológico  $\mathcal{M}$  para el cual todo  $x \in \mathcal{M}$  tiene un entorno que *parece*  $\mathbb{R}^n$ , lo que nos permite aproximar localmente objetos no lineales como objetos lineales.

**Definición 2.5. (Curva).** Sea  $I \in \mathbb{R}$  un intervalo abierto. Una curva en una n-variedad  $\mathcal{M}$  es una aplicación  $\mathbf{c}$  diferenciable, esto es,

$$\begin{aligned} \mathbf{c}: I &\rightarrow \mathcal{M} \\ t &\mapsto \mathbf{c}(t) = (x^1(t), x^2(t), \dots, x^n(t)) \end{aligned}$$

con  $x^i(t) \in C^\infty(I)$  para  $i = 1, 2, \dots, n$ .

Para motivar la definición de vector tangente, consideremos una curva  $c(t)$  sobre  $\mathcal{M}$  y un punto  $\mathbf{c}(t_0) = x_0 \in \mathcal{M}$ . En dos cartas de la estructura diferencial que contengan a  $x_0$ ,  $(\mathcal{U}, \phi)$  y  $(\mathcal{V}, \psi)$ , la representación coordenada de la curva viene dada por  $\mathbf{c} \equiv \phi \circ c = (x^1(t), \dots, x^n(t))$  y  $\tilde{\mathbf{c}} \equiv \psi \circ c = (\tilde{x}^1(t), \dots, \tilde{x}^n(t))$  respectivamente. Como  $\psi \circ c = \psi \circ \phi^{-1} \circ \phi \circ c \rightarrow \tilde{\mathbf{c}} = \psi \circ \phi^{-1} \circ \mathbf{c}$ , y derivando:

$$\frac{d\tilde{\mathbf{c}}}{dt}(t_0) = D(\psi \circ \phi^{-1})|_{\mathbf{c}(t_0)} \frac{d\mathbf{c}}{dt}(t_0) \quad (2.1)$$

Alternativamente, escribiendo los sistemas de coordenadas de cada carta explícitamente, la relación anterior es la familiar transformación covariante de los elementos de  $\mathbf{c}$ :

$$\frac{d\tilde{x}^i}{dt} = \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^j} \frac{dx^j}{dt} \quad (2.2)$$

**Definición 2.6. (Vector tangente).** Sea  $\mathcal{M}$  una variedad diferencial y  $x_o \in \mathcal{M}$ . Consideremos el conjunto de las cartas de la estructura diferencial  $\Omega$  de  $\mathcal{M}$  que contienen a  $x_o$ ,  $\{(\mathcal{U}_\alpha, \phi_\alpha)\}_{x_o} = \{(\mathcal{U}, \phi) : (\mathcal{U}, \phi) \in \Omega, x_o \in \mathcal{U}\}$ . Sea  $\mathcal{V} = \bigcap_\alpha \mathcal{U}_\alpha$  la intersección de todos los  $\mathcal{U}_\alpha$  de las cartas  $\{(\mathcal{U}_\alpha, \phi_\alpha)\}_{x_o}$ . Un vector tangente a  $x_o$  se define como una función  $v : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}^n$  cuyo cambio de coordenadas entre dos cartas  $(\mathcal{U}_\alpha, \phi), (\mathcal{U}_\beta, \psi)$  viene dado por

$$\tilde{\mathbf{v}} = D(\psi \circ \phi^{-1})|_{x_o} \mathbf{v}. \quad \text{o equivalentemente,} \quad \tilde{v}^j = \frac{\partial \tilde{x}^j}{\partial x^i} v^i. \quad (2.3)$$

**Definición 2.7. (Espacio tangente).** El espacio tangente de  $\mathcal{M}$  en  $x$  es el conjunto de todos los vectores tangentes  $\mathbf{v}$  en  $x$  y se denota como  $T_x\mathcal{M}$ .

**Definición 2.8. (Métrica).** Se llama métrica a una aplicación  $g : T_x\mathcal{M} \times T_x\mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$  de clase  $C^\infty$  que verifica, para todo  $x, y, z \in T_x\mathcal{M}$ :

- (a)  $g(x, y) = g(y, x)$ , esto es, la métrica es simétrica.
- (b)  $g(\alpha x + \beta y, z) = \alpha g(x, z) + \beta g(y, z) \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , es decir, es bilinear.
- (c) No existe  $k \in T_x\mathcal{M}$  no nulo tal que  $g(k, x) = 0$ , esto es, la métrica no está *degenerada*.

La métrica nos provee de una manera de medir distancias y ángulos en una variedad  $\mathcal{M}$ .

**Definición 2.9. (Signatura de la métrica).** Sea  $(g_{\mu\nu})$  la matriz asociada a la métrica  $g$  en  $n$  una  $n$ -variedad. En todos los puntos donde  $\det(g_{\mu\nu}) \neq 0$ , entonces existen  $n$  autovalores<sup>2</sup> (no necesariamente distintos)  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ . Definimos la signatura de la métrica,  $\text{sig}(g)$  como el número de autovalores positivos, nulos y negativos de la métrica:

$$\text{sig}(g) = (p, z, n), \quad \text{con } p = \#\{\lambda_i : \lambda_i > 0\}, \quad z = \#\{\lambda_i : \lambda_i = 0\}, \quad n = \#\{\lambda_i : \lambda_i < 0\} \quad (2.4)$$

**Definición 2.10. (Paridad de la signatura).** Sea  $g$  una métrica con signatura  $\text{sig}(g) = (p, z, n)$ . Se define la paridad de la signatura como  $s = (-1)^n$ . A modo de ejemplo, la signatura de la métrica de Minkowski en una 4-variedad,  $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$  (o  $\text{diag}(+1, -1, -1, -1)$ ) es  $\text{sig}(\eta) = -1$ .

**Definición 2.11. (Variedad Lorentziana).** Sea  $(\mathcal{M}, g)$  un par  $n$ -variedad, métrica con  $\text{sig}(g) = (1, 0, n-1)$  o  $\text{sig}(g) = (n-1, 0, 1)$ . Entonces  $(\mathcal{M}, g)$  es una variedad Lorentziana.

Es habitual el abuso del lenguaje de llamar variedad Lorentziana a  $\mathcal{M}$  en vez de al par  $(\mathcal{M}, g)$ . Las 4-variedades Lorentzianas son de especial interés, ya que se puede demostrar que el espacio tangente en cualquier punto  $T_x\mathcal{M}$  es isométrico a un espacio(-tiempo) de Minkowski [11]. Este hecho, junto a la idea del Principio de Equivalencia de Einstein de que la física en cualquier marco de referencia inercial local debe ser la de Relatividad Especial [12] hace que las variedades Lorentzianas sean el objeto matemático idóneo para modelar cualquier espacio-tiempo.

---

<sup>2</sup>En Relatividad General, la métrica  $g_{\mu\nu}$  debe ser invertible, por lo que las métricas siempre tendrán signatura bien definida. Hay diversas razones, pero una de ellas es que la acción de Einstein-Hilbert, de la cual emergen las ecuaciones de campo de Einstein, se anula si  $\det(g_{\mu\nu}) = 0$ , como se verá en detalle en §3.5

**Definición 2.12. (Tensor).** Sea  $V$  un espacio vectorial sobre  $\mathbb{R}$  y sea  $\tilde{V}$  su espacio dual. Denotamos por  $T_q^p(V)$  como el espacio de funciones multilineales  $T: \tilde{V} \times \dots \times \tilde{V} \times V \times \dots \times V \rightarrow \mathbb{R}$ . Si  $\hat{e}^1, \dots, \hat{e}^p \in \tilde{V}$  y  $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_q \in V$ , entonces  $\hat{e}^1 \otimes \dots \otimes \hat{e}^p \otimes \vec{e}_1 \otimes \dots \otimes \vec{e}_q \in T_q^p(V)$ , donde  $\otimes$  es el producto tensorial. Cualquier tensor puede ser unívocamente descrito como

$$T = T_{j_1, \dots, j_q}^{i_1, \dots, i_p} \hat{e}^{j_1} \otimes \dots \otimes \hat{e}^{j_p} \otimes \vec{e}_{i_1} \otimes \dots \otimes \vec{e}_{i_q}. \quad (2.5)$$

**Definición 2.13. (Antisimetrizador).** Sea  $\Lambda_k(V) = \{\omega : \omega \in T_k^0(V), \omega \text{ totalmente antisimétrico}\}$  el espacio vectorial de todos los tensores de orden  $p$  sobre  $V$  tal que, al intercambiar cualquier par de variables, cambia su signo. Definimos  $\mathcal{A}$  como un operador que verifique

- (a)  $\forall \omega \in T_k^0(V)$ , entonces  $\mathcal{A}\omega \in \Lambda_k(V)$ .
- (b) Si  $\omega \in \Lambda_k(V)$ , entonces  $\mathcal{A}\omega = \omega$ .
- (c) Si  $\omega \in T_k^0(V)$ , entonces  $\mathcal{A}(\mathcal{A}\omega) = \omega$ .

**Definición 2.14. (Producto exterior).** Sea  $\omega \in \Lambda_k(V)$ ,  $\nu \in \Lambda_l(V)$ . Definimos  $\omega \wedge \nu \in \Lambda_{k+l}(V)$  como el producto tensorial de  $\omega$  y  $\nu$ , totalmente antisimetrizado, salvo constantes:

$$\omega \wedge \nu = \frac{(k+l)!}{k!l!} \mathcal{A}(\omega \otimes \nu). \quad (2.6)$$

**Lema 2.15.** (a) (i)  $(\cdot) \wedge (\cdot): \Lambda_k(V) \times \Lambda_l(V) \rightarrow \Lambda_{k+l}(V)$  es bilinear y asociativo.  
(b) Si  $\omega \in \Lambda_k(V)$ ,  $\nu \in \Lambda_l(V)$ , entonces  $\omega \wedge \nu = (-1)^{kl} \nu \wedge \omega$

**Teorema 2.16.** Sea  $\{\hat{e}^i\}$  base de  $\tilde{V}$ , entonces  $\{\hat{e}^{i_1} \wedge \dots \wedge \hat{e}^{i_k} : 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n\}$  es una base de  $\Lambda_k(E)$  [19].

**Definición 2.17. (Forma diferencial).** Sea  $x \in \mathcal{M}$  un punto en una  $n$ -variedad diferencial  $\mathcal{M}$ . Sea  $T_x\mathcal{M}$  el espacio tangente a  $\mathcal{M}$  en  $x$ . Entonces, una *forma diferencial de grado  $k$  sobre  $\mathcal{M}$*  es  $\omega(x) \in \Lambda_k(T_x\mathcal{M})$ . En una carta  $(\mathcal{U}, \phi)$ , con un sistema de coordenadas  $\phi: \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V}$ ,  $\phi(u) = (x_1(u), x_2(u), \dots, x_n(u))$  y una base  $\{dx^i\}_{i=1, \dots, i_n}$  podemos expresar la forma diferencial como

$$\omega = \frac{1}{k!} \omega_{i_1, \dots, i_k} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} = \omega_{|i_1, \dots, i_k|} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}, \quad (2.7)$$

dónde las barras verticales alrededor de los índices denotan suma solo para  $i_1 < i_2 < \dots < i_k$ .

**Definición 2.18. (Derivada exterior).** El mapa lineal  $d: \Lambda_k(T_x\mathcal{M}) \rightarrow \Lambda_{k+1}(T_x\mathcal{M})$  que satisface:

- (a)  $d\sigma$  es el diferencial (1-forma) de la 0-forma (función)  $\sigma$ .
- (b) Si  $\alpha$  es una  $p$ -forma y  $\beta$  es una  $q$ -forma, entonces  $d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^p \alpha \wedge d\beta$ . La regla de Leibniz para la derivación del producto de dos formas es diferente a la habitual.
- (c)  $d^2 = dd = 0$

Considérese  $\alpha \in \Lambda_k(T_x\mathcal{M})$  en una carta  $(\mathcal{U}, \phi)$ , con  $\phi = (x^1, \dots, x^n)$ , entonces por el teorema 2.16, en este sistema de coordenadas  $\alpha = \alpha_{i_1, i_2, \dots, i_k} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$  y  $d\alpha \in \Lambda_{k+1}(T_x\mathcal{M})$  viene dada por

$$d\alpha = \frac{\partial \alpha_{i_1, \dots, i_k}}{\partial x^{m_1}} dx^{m_1} \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}. \quad (2.8)$$

Lo más relevante es que la derivada exterior produce una  $(p+1)$ -forma cuando actúa sobre una  $p$ -forma. Además, su cuadrado siempre es  $d^2 = 0$ .

**Teorema 2.19. (Teorema de Stokes-Cartan).** Sea  $\omega$  una  $(k-1)$ -forma suave en una  $n$ -variedad orientada  $\mathcal{M}$  y sea  $\partial\mathcal{M}$  su frontera. Entonces,

$$\int_{\mathcal{M}} d\omega = \int_{\partial\mathcal{M}} \omega. \quad (2.9)$$

**Definición 2.20. (Lema de Poincaré).** Una forma diferencial  $\alpha$  se dice *cerrada* si  $d\alpha = 0$  y se dice que es *exacta* si  $\alpha = d\sigma$ . Todas las formas exactas son cerradas, ya que por definición  $dd\beta = 0$ . El lema de Poincaré afirma que el recíproco también es cierto, es decir:

$$d\alpha = 0 \iff \alpha = d\beta. \quad (2.10)$$

**Definición 2.21. (Tensor de Levi-Civita).** El tensor de Levi-Civita es el tensor  $\varepsilon_{i_1, \dots, i_d} \in T_d^o(V)$  (o  $\varepsilon^{i_1, \dots, i_d} \in T_o^d(V)$ ) totalmente antisimétrico bajo permutaciones de los índices. Se sigue la convención de [6], donde se define  $\varepsilon_{012\dots(d-1)} = -\varepsilon^{012\dots(d-1)} = 1$ . Su contracción viene dada por

$$\varepsilon_{i_1, \dots, i_n, j_{n+1}, \dots, j_d} \varepsilon^{i_1, \dots, i_n, k_{n+1}, \dots, k_d} = -(d-n)! n! \delta_{j_{n+1}, \dots, j_d}^{k_{n+1}, \dots, k_d}, \quad (2.11)$$

dónde la  $\delta$  de Kronecker generalizada se define como

$$\delta_{j_{n+1}, \dots, j_d}^{k_{n+1}, \dots, k_d} = (d-n)! \mathcal{A}(\delta_{j_{n+1}}^{k_{n+1}} \dots \delta_{j_d}^{k_d}). \quad (2.12)$$

**Definición 2.22. (Operador estrella de Hodge).** Sea  $\omega$  una  $n$ -forma diferencial orientada sobre la  $n$ -variedad  $\mathcal{M}$  equipada con una métrica  $g$ , cuya base  $\{dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n\}$  solo tiene un elemento. Sea  $\{dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} : 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n\}$  una base del espacio de  $k$ -formas  $\Lambda_k(T_x\mathcal{M})$  y tomemos  $\alpha, \beta \in \Lambda_k(T_x\mathcal{M})$ . Entonces, definimos el operador estrella de Hodge como el operador lineal  $\star: \Lambda_k(T_x\mathcal{M}) \rightarrow \Lambda_{n-k}(T_x\mathcal{M})$  tal que se satisface

$$\alpha \wedge \star\beta = \langle \alpha, \beta \rangle \omega, \quad \text{con} \quad \langle \alpha, \beta \rangle = \det(g(\alpha_i, \beta_j)). \quad (2.13)$$

En notación de índices abstracta, si  $\beta = (\beta_{b_1, \dots, b_k} / k!) dx^{b_1} \wedge \dots \wedge dx^{b_k}$ , se tiene

$$\star\beta = \frac{1}{(n-k)!} \frac{\sqrt{|g|}}{k!} \underbrace{g^{b_1 c_1} \dots g^{b_k c_k} \beta_{b_1, \dots, b_k}}_{\beta^{c_1, \dots, c_k}} \varepsilon_{c_1, \dots, c_n} dx^{c_{k+1}} \wedge \dots \wedge dx^{c_n}, \quad (2.14)$$

dónde  $g \equiv \det(g_{\mu\nu})$  y  $\varepsilon$  es el tensor de Levi-Civita. Intuitivamente, el operador  $\star$ , al actuar sobre una  $k$ -forma sobre  $\mathcal{M}$ , nos devuelve una  $(n-k)$ -forma diferencial *perpendicular* a la  $k$ -forma sobre la que actúa. El producto de una  $k$ -forma y una  $(n-k)$ -forma es una  $n$ -forma, que es justo la dimensión de la variedad, por tanto hemos *llenado* las dimensiones, objeto que al integrar sobre  $\mathcal{M}$  resulta en un escalar. Todo esto puede ser visualizado en la figura 2

**Definición 2.23. (Forma elemento de volumen).** Sea 1 una 0-forma constante en toda una  $n$ -variedad  $\mathcal{M}$  con métrica  $g$ . Se define la *forma elemento de volumen en una  $n$ -variedad*  $dv_n := \star 1$ . En un sistema de coordenadas concreto, siguiendo la expresión (2.14),

$$dv_n = \frac{\sqrt{|g|}}{n!} \varepsilon_{i_1, \dots, i_n} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_n} = -\frac{\sqrt{|g|}}{n!} \underbrace{\varepsilon_{i_1, \dots, i_n} \varepsilon^{i_1, \dots, i_n}}_{-n!} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n = \sqrt{|g|} d^n x \quad (2.15)$$

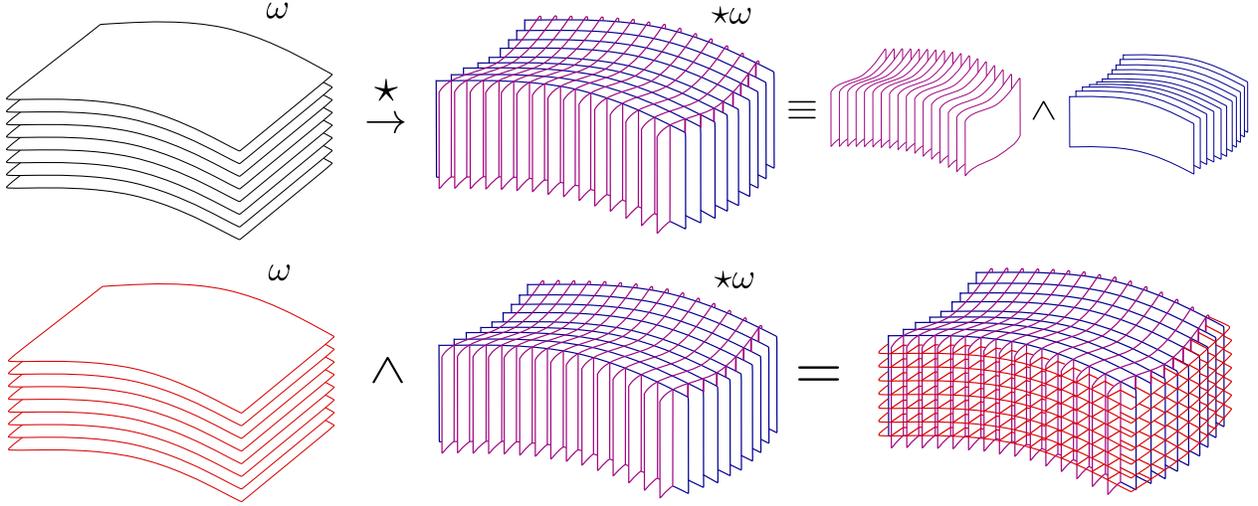


Figura 2: Esquema de la actuación del operador  $\star$ , en una 1-forma  $\omega$  sobre una 3-variedad. La  $\star\omega$  es una 2-forma *perpendicular* a  $\omega$ . El producto  $\omega \wedge \star\omega$  es una 3-forma que *cubre* la 3-variedad.

**Definición 2.24. (Inversa operador  $\star$ ).** Sea  $\mathcal{M}$  una  $n$ -variedad diferencial y sean  $\alpha, \beta \in \Lambda_k(T_x\mathcal{M})$   $k$ -formas sobre  $\mathcal{M}$ . Se puede demostrar que el operador  $\star$ , actuando dos veces sobre  $\alpha$  deja invariante  $\alpha$  salvo posiblemente un signo [8]

$$\star\star\alpha = s(-1)^{k(n-k)} \rightarrow \left( s(-1)^{k(n-k)} \star \right) \star\alpha = \alpha. \quad (2.16)$$

Se define  $\star^{-1}$  como el operador  $\star^{-1}: \Lambda_{n-k}(T_x\mathcal{M}) \rightarrow \Lambda_k(T_x\mathcal{M})$  lineal

$$\star^{-1} = s(-1)^{k(n-k)} \star. \quad (2.17)$$

**Definición 2.25. (Producto interior).** Sea  $\mathcal{M}$  una  $n$ -variedad diferencial y sean  $\alpha, \beta \in \Lambda_k(T_x\mathcal{M})$   $k$ -formas sobre  $\mathcal{M}$ . Definimos el producto interior como:

$$\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle: \Lambda_k(T_x\mathcal{M}) \times \Lambda_k(T_x\mathcal{M}) \rightarrow \mathbb{R} \quad (2.18)$$

$$(\alpha, \beta) \mapsto \langle\langle \alpha, \beta \rangle\rangle := \int_{\mathcal{M}} \alpha \wedge \star\beta. \quad (2.19)$$

**Lema 2.26.** El producto interior es conmutativo ya que  $\alpha \wedge \star\beta = \beta \wedge \star\alpha$ , esto es,

$$\langle\langle \alpha, \beta \rangle\rangle = \int_{\mathcal{M}} \alpha \wedge \star\beta = \int_{\mathcal{M}} \beta \wedge \star\alpha = \langle\langle \beta, \alpha \rangle\rangle. \quad (2.20)$$

**Definición 2.27. (Coderivada).** La coderivada,  $d^\dagger$ , se define como el operador adjunto de la derivada respecto el producto interior, es decir, verifica  $\langle\langle d\alpha, \beta \rangle\rangle = \langle\langle \alpha, d^\dagger\beta \rangle\rangle$ . Se puede encontrar una expresión explícita partiendo del teorema de Stokes-Cartan en variedades  $\mathcal{M}$  cerradas ( $\partial\mathcal{M} = \emptyset$ ), considerando dos  $k$ -formas diferenciales  $\alpha, \beta$ :

$$0 = \int_{\mathcal{M}} d(\alpha \wedge \star\beta) = \int_{\mathcal{M}} d\alpha \wedge \star\beta + \alpha \wedge (-1)^k d\star\beta \quad (2.21)$$

$$= \int_{\mathcal{M}} d\alpha \wedge \star\beta - \alpha \wedge \star(\star^{-1}(-1)^{k+1}d\star)\beta = \langle\langle d\alpha, \beta \rangle\rangle - \langle\langle \alpha, d^\dagger\beta \rangle\rangle, \quad (2.22)$$

donde se ha tomado  $d^\dagger := \star^{-1}(-1)^{k+1}d\star$ . Sustituyendo la expresión (2.17) para  $\star^{-1}$ , se llega a

$$d^\dagger := \star^{-1}(-1)^{k+1}d\star = s(-1)^{k(n-k)} \star(-1)^{k+1}d\star = -s(-1)^{k(1+n-k)} \star d\star. \quad (2.23)$$

**Ejemplo 2.28.** A modo de ejemplo, consideremos la coderivación de una 2-forma sobre una 4-variedad Lorentziana ( $s = -1$ ) arbitraria. Entonces,  $k = 2$  y  $n = 4$  y por tanto  $d^\dagger = \star d \star$ .

**Teorema 2.29.** Si  $B = b_a dx^a$  es una 1-forma diferencial en una 4-variedad Lorentziana, entonces:

$$d^\dagger B = - \star d \star B = \nabla^\alpha b_\alpha. \quad (2.24)$$

La demostración es relativamente extensa y puede ser encontrada en el apéndice A.

## 2.2. Grupo de Lorentz

En este anexo se va a exponer el grupo de Lorentz, el cual es de amplia utilidad para hablar sobre Relatividad Especial y es indispensable en las secciones §3.1 y §3.3. Se sigue [18] y [1].

**Definición 2.30. (Transformación de Lorentz homogénea):** Las transformaciones de Lorentz se definen como las transformaciones lineales sobre un espacio-tiempo de Minkowski, descrito por una variedad Lorentziana  $\mathcal{M}_\eta = (\mathbb{R}^4, \eta)$  cuya métrica es  $(\eta_{\mu\nu}) = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$ ,

$$\Lambda: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4 \quad (2.25)$$

$$x^\nu \mapsto x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu \quad (2.26)$$

que preservan la norma de los 4-vectores, esto es  $x^\mu x_\mu = x'^\mu x'_\mu = x'^\mu \eta_{\mu\nu} x'^\nu = \Lambda^\mu_\alpha x^\alpha \eta_{\mu\nu} \Lambda^\nu_\beta x^\beta$ . Entonces, renombrando en el lado izquierdo y expresando el producto escalar con la métrica, expresamos la condición alternativa para que  $\Lambda$  sea transformación de Lorentz homogénea.

$$x^\alpha \eta_{\alpha\beta} x^\beta = x^\alpha \Lambda^\mu_\alpha \eta_{\mu\nu} \Lambda^\nu_\beta x^\beta \implies \eta_{\alpha\beta} = \Lambda^\mu_\alpha \eta_{\mu\nu} \Lambda^\nu_\beta. \quad (2.27)$$

La condición (2.27) puede escribirse de forma matricial,

$$\eta_{\alpha\beta} = \Lambda^\mu_\alpha \eta_{\mu\nu} \Lambda^\nu_\beta = (\Lambda^\top)_\alpha^\mu \eta_{\mu\nu} \Lambda^\nu_\beta \implies \hat{\eta} = \hat{\Lambda}^\top \hat{\eta} \hat{\Lambda}. \quad (2.28)$$

Tomando determinantes en ambos lados de la última igualdad de (2.28),

$$\det(\hat{\eta}) = \det(\hat{\Lambda}^\top \hat{\eta} \hat{\Lambda}) = \det(\hat{\Lambda}^\top) \det(\hat{\eta}) \det(\hat{\Lambda}) \implies \det(\hat{\Lambda}) = \pm 1. \quad (2.29)$$

**Definición 2.31.** Las transformaciones de Lorentz con  $\det(\Lambda) = +1$  se llaman *propias* y se denotan por  $L_+$ , mientras que las que tienen  $\det(\Lambda) = -1$  se llaman *impropias* y se denotan por  $L_-$ .

Nos restringimos al caso de las *propias*, por tanto exigimos

$$\det(\Lambda) = -\Lambda^0_\mu \Lambda^1_\nu \Lambda^2_\lambda \Lambda^3_\sigma \epsilon^{\mu\nu\lambda\sigma} = 1, \implies \Lambda^\alpha_\mu \Lambda^\beta_\nu \Lambda^\gamma_\lambda \Lambda^\delta_\sigma \epsilon^{\mu\nu\lambda\sigma} = \epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}. \quad (2.30)$$

dónde  $\epsilon^{\mu\nu\lambda\sigma}$  es el tensor de Levi-Civita según la definición 2.21.

**Definición 2.32. (Punto fijo de un grupo):** Sea  $g \in G$ , con  $G$  un grupo. Si  $x$  es un objeto tal que  $g \circ x = x$ , entonces  $x$  se llama un *punto fijo* del grupo. Denotamos el conjunto de puntos fijos de  $G$  como  $\mathfrak{F}(G)$ .

**Corolario 2.33.**  $L_+$  puede ser definido como el grupo cuyo conjunto de puntos fijos  $\mathfrak{F}(G)$  es generado por combinaciones (productos) de elementos de  $\{0, \eta_{\mu\nu}, \epsilon^{\mu\nu\gamma\sigma}\}$ .

Podemos seguir clasificando transformaciones, poniendo  $\alpha = \beta = 0$  en (2.27), se llega a

$$1 = \Lambda^\mu_0 \eta_{\mu\nu} \Lambda^\nu_0 \implies (\Lambda^0_0)^2 - \sum_{m=1}^3 (\Lambda^m_0)^2 = 1 \implies (\Lambda^0_0)^2 \geq 1. \quad (2.31)$$

**Definición 2.34.** Las transformaciones de Lorentz (propias o no) con  $\Lambda^0_0 \geq 1$  se denominan *isócronas* y se denotan con  $L^\uparrow_\pm$ . Aquellas con  $\Lambda^0_0 \leq -1$  se denominan *antícronas* y se denotan con  $L^\downarrow_\pm$ . Esto separa el grupo de Lorentz,  $L$ , en cuatro subgrupos dependiendo del signo de  $\det\Lambda$  y del de  $\Lambda^0_0$ .

Además, hay ciertas transformaciones que llevan elementos de un subgrupo a otro, siendo estas:

- (a) Transformación de **paridad**,  $\Pi : (t, \vec{x}) \mapsto (t, -\vec{x})$ .
- (b) **Inversión temporal**,  $T : (t, \vec{x}) \mapsto (-t, \vec{x})$ .

Esto nos permite dejar de hablar del grupo de Lorentz completo para hablar únicamente del grupo propio ortócrono,  $L^\uparrow_+$ , o *grupo de Lorentz restringido*, y describir el resto de subgrupos en base a  $L^\uparrow_+$  y las transformaciones anteriores. El grupo reducido de Lorentz es de especial interés para el presente trabajo puesto que son las  $\Lambda^\mu_\nu$  que no invierten el transcurso del tiempo ni aplican una inversión espacial (paridad).

$\det\Lambda$	$\text{sgn}\Lambda^0_0$	Elemento discreto	Subgrupo	Nombre
+1	+1	$I : (t, \vec{x}) \mapsto (t, \vec{x})$	$L^\uparrow_+$	propio isócrono
-1	+1	$\Pi : (t, \vec{x}) \mapsto (t, -\vec{x})$	$L^\uparrow_+$	impropio isócrono
+1	-1	$T : (t, \vec{x}) \mapsto (-t, \vec{x})$	$L^\downarrow_+$	propio antícrono
-1	-1	$T\Pi : (t, \vec{x}) \mapsto (-t, -\vec{x})$	$L^\downarrow_+$	impropio antícrono

Tabla 1: Subgrupo de  $L$  que se genera al aplicar un *elemento discreto* sobre los elementos de  $L^\uparrow_+$ .

**Definición 2.35. (Boost de Lorentz):** Un  $\Lambda^\mu_\nu \in L^\uparrow_+$  es un *boost* en la dirección  $\hat{n} \in \mathbb{R}^3$  si deja invariante cualquier 3-vector ortogonal a  $\hat{n}$ . Por ejemplo, en una base cartesiana  $\{\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}\}$ , el boost de Lorentz en la dirección  $\hat{x}$  es

$$\Lambda^\mu_\nu = \begin{bmatrix} \Lambda^0_0 & \Lambda^0_1 & \Lambda^0_2 & \Lambda^0_3 \\ \Lambda^1_0 & \Lambda^1_1 & \Lambda^1_2 & \Lambda^1_3 \\ \Lambda^2_0 & \Lambda^2_1 & \Lambda^2_2 & \Lambda^2_3 \\ \Lambda^3_0 & \Lambda^3_1 & \Lambda^3_2 & \Lambda^3_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (2.32)$$

con  $\beta = v/c$  y  $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$  factores que determinan la magnitud del *boost*.

**Proposición 2.36.** Cada  $\Lambda \in L^\uparrow_+$  puede ser expresada como una combinación de un boost de Lorentz,  $B$  y una rotación  $R \in SO(3)$ ,

$$\Lambda = RB. \quad (2.33)$$

### 3. Gravitación y Electromagnetismo

En este capítulo se derivan las ecuaciones de Einstein-Maxwell partiendo de la acción de Einstein-Hilbert y la densidad Lagrangiana de la interacción electromagnética usando el principio de Hamilton, utilizando herramientas del cálculo exterior. Una vez obtenidas, comprobamos que se reducen a las ecuaciones de Maxwell de la electrodinámica clásica para espacio-tiempos planos.

#### 3.1. Motivación

Como se expone en §1, las ecuaciones de Maxwell suelen presentarse en la forma de las cuatro ecuaciones en derivadas parciales acopladas (1.1)-(1.4). Estas son invariantes bajo transformaciones de Lorentz<sup>3</sup>, por lo que cabe esperar que sean válidas en espacio-tiempos  $(\mathcal{M}, g_{\mu\nu})$  cuya métrica  $g_{\mu\nu}$  también sea invariante bajo transformaciones de Lorentz. No obstante, como se demuestra en el apéndice B, que una métrica  $g_{\mu\nu}$  sea invariante bajo transformaciones Lorentz implica que es de Minkowski, esto es  $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ . Es por ello que el régimen de validez de las ecuaciones de Maxwell se reduce a espacio-tiempos planos. No obstante, esta afirmación lleva a una contradicción.

Descartemos todas aquellas soluciones donde se requiere de un objeto con masa, como podría ser el campo descrito por una carga puntual la cual inherentemente curvaría el espacio-tiempo. Supongamos entonces una onda electromagnética, descrita por  $\vec{E} = \vec{E}_o e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}$  en un espacio-tiempo de Minkowski. Para ondas electromagnéticas, podemos definir la densidad de energía electromagnética como [9]

$$u_{EM} = \varepsilon_o E^2 = \varepsilon_o E_o^2 \cos^2(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t) \sim \varepsilon E_o^2. \quad (3.1)$$

Esta energía electromagnética contribuye al tensor energía-momento,  $T_{\mu\nu}$ , concretamente, si la onda electromagnética se propaga en la dirección  $\hat{x}$ , con  $\vec{E} \parallel \hat{y}$  y  $\vec{B} \parallel \hat{z}$ , se tiene [4]:

$$T^{\mu\nu} = \frac{E_o^2 \cos^2(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)}{4\pi} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.2)$$

Si invocamos las ecuaciones de campo de Einstein, para  $\Lambda = 0$

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}, \quad (3.3)$$

viendo que el tensor energía-momento es no nulo, cabe esperar que  $R_{\mu\nu} \neq 0$  y por ende haya curvatura en el espacio-tiempo donde exista la onda electromagnética. De hecho, la solución de la ecuación de Einstein en este caso es exacta y predice un ciclo de expansión-contracción del espacio-tiempo [4].

En resumen, las ecuaciones de Maxwell en notación vectorial clásica solo tienen validez en espacio-tiempos de Minkowski y cualquier solución, excepto  $\vec{E} = \vec{B} = 0$ , implica que hay curvatura, ya que la presencia de energía curva el espacio-tiempo, lo que lleva a una contradicción. La motivación detrás de este trabajo encontrar una formulación de la electrodinámica que funcione

---

<sup>3</sup>Las ecuaciones de Maxwell son invariantes bajo transformaciones de Lorentz si suponemos que los campos se transforman de cierta manera. Una afirmación más correcta sería *las ecuaciones de Lorentz tienen el potencial de ser invariantes de Lorentz* [13] lo cual no se puede decir para, por ejemplo, transformaciones de Galileo.

en cualquier espacio-tiempo y que se reduzca a la formulación clásica tanto en espacios-tiempo de Minkowski como en sistemas de referencia inerciales locales (por el principio de equivalencia). Esto se puede conseguir de diferentes maneras, pero debido a su elegancia y su directa relación con la geometría, los conceptos de integración y derivación, las formas diferenciales son el formalismo idóneo.

### 3.2. Acción de Einstein-Hilbert. Lagrangianos geométrico y no geométrico

En esta sección se sigue principalmente [10]. Las ecuaciones de campo de Einstein se pueden derivar (y se derivan en §3.5) de la acción de Einstein-Hilbert<sup>4</sup>, denotada por  $S_{EH}$  y dada por

$$S_{EH}[g_{\mu\nu}] = \frac{1}{2\kappa} \int R \sqrt{-g} d^4x, \quad (3.4)$$

donde  $\kappa = 8\pi Gc^{-4}$  y  $g := \det(g_{\mu\nu})$  y  $R$  es el escalar de Ricci, fruto de buscar representar los efectos de geometría del espacio-tiempo con un integrando escalar que no contenga derivadas de más de segundo orden. La cantidad  $\sqrt{-g}d^4x$  está presente en el integrando ya que integrar en  $n$ -variedades,  $\sqrt{|g|}d^n x$  es el diferencial de volumen invariante bajo transformaciones de coordenadas, esto es, la forma elemento de volumen (definición 2.23). Para 4-variedades Lorentzianas  $(\mathcal{M}, g)$ , se tiene  $g < 0$  y por tanto identificamos la cantidad  $dv_4 = \sqrt{-g}d^4x = \sqrt{-g}dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3$ .

Además, en la expresión (3.4) se integra sobre todo el espacio, por tanto el integrando se trata de una densidad Lagrangiana que describe la gravedad vía la geometría. Si juntamos este hecho con la observación anterior, podemos postular una 4-forma Lagrangiana<sup>5</sup> que al ser integrada sobre  $\mathcal{M}$  resulta en  $S_{EH}$ ,

$$\mathcal{L}_{\text{geom}}(g_{\mu\nu}) = \frac{1}{2\kappa} R dv_4 \implies S_{EH} = \int_{\mathcal{M}} \mathcal{L}_{\text{geom}} dv_4. \quad (3.5)$$

A  $\mathcal{L}_{\text{geom}}$  se le pueden sumar otros términos  $\mathcal{L}_{ng}$  que describan otro tipo de interacciones de origen no geométrico. En este trabajo nos centramos en el electromagnetismo clásico.

### 3.3. Densidad Lagrangiana electromagnética

En este apartado se sigue la línea de [1]. Consideremos una teoría clásica de campos en 4 dimensiones. Se supone que el único campo existente es el electromagnético,  $A_\mu$ , dado por el 4-potencial  $A^\mu = (\phi, \vec{A})$ , donde  $\phi$  es el potencial eléctrico y  $\vec{A}$  el magnético. Por tanto, el funcional acción en términos de la una densidad Lagrangiana es

$$S[A_\mu] = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^3} \mathcal{L}_{EM}(A_\mu) d^3x dt = \int_{\mathbb{R}^4} \mathcal{L}_{EM}(A_\mu) d^4x. \quad (3.6)$$

De acuerdo con las observaciones experimentales, vamos a imponer

<sup>4</sup>Hilbert fue el primero en postular esta acción, cinco días antes de que Einstein formulara las ecuaciones de campo de manera independiente [4].

<sup>5</sup>Al hablar de  $\mathcal{L}_{\text{geom}}$  como una 4-forma, el diferencial de volumen viene incluido, por lo que al menos dimensionalmente ya no es una densidad. Es por ello que se emplea el nombre 4-forma Lagrangiana.

- (a) La densidad Lagrangiana  $\mathcal{L}_{EM}$  debe proporcionar la formulación clásica del electromagnetismo, expuesta en §1 en el caso de que nuestro espacio-tiempo sea Minkowski. Por tanto,  $\mathcal{L}_{EM}$  debe ser un escalar de Lorentz si la métrica es  $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$ . Como se explica en el apéndice B, esto implica que la dependencia en  $A_\mu$  de la densidad tiene que ser o bien de un producto escalar con otro vector, ya sea  $\partial^\mu A_\mu$ ,  $A^\mu A_\mu$ ,  $B^\mu A_\mu$  etc. o bien de la contracción del tensor completamente antisimétrico  $\epsilon_{\mu\nu\gamma\sigma}$  con un tensor de orden 2 constituido por  $A_\mu$ . La dependencia de términos como pueden ser  $\partial_\mu A_\mu$  queda descartada por esta imposición.<sup>6</sup>
- (b) La acción permanezca invariante bajo transformaciones gauge  $A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu f(x^\mu)$ . El objeto más sencillo que verifica esto es el tensor de Faraday,  $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$ , ya que

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu \quad (3.7)$$

$$= \partial^\mu (A^\nu + \partial^\nu f) - \partial^\nu (A^\mu + \partial^\mu f) \quad (3.8)$$

$$= \partial^\nu A^\nu + \partial^\mu \partial^\nu f - \partial^\nu A^\mu - \partial^\nu \partial^\mu f \quad (3.9)$$

$$= \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu = F^{\mu\nu}. \quad (3.10)$$

Nótese que  $F_{\mu\nu}$  es totalmente antisimétrico, ya que

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu = -(\partial_\nu A_\mu + \partial_\mu A_\nu) = -F_{\nu\mu}. \quad (3.11)$$

Construir un elemento a partir de  $F^{\mu\nu}$  que respete la condición (a) es sencillo,

$$F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) \quad (3.12)$$

$$= \partial^\mu \partial_\mu A^\nu A_\nu - \partial^\mu A_\mu \partial_\nu A^\nu - \partial^\nu A_\nu \partial_\mu A^\mu + \partial^\nu \partial_\nu A^\mu A_\mu \quad (3.13)$$

$$= \partial^\mu \partial_\mu A^\nu A_\nu + \partial^\nu \partial_\nu A^\mu A_\mu. \quad (3.14)$$

Vemos que todos los términos que no se cancelan son productos escalares, que de estar en un tiempo plano resultarían en invarianza de Lorentz. El término  $\epsilon_{\mu\nu\gamma\sigma} F^{\gamma\sigma} F^{\mu\nu}$  también es un escalar Lorentz invariante bajo transformaciones Gauge, pero se puede demostrar que viola inversión de paridad [1],  $\Pi : (t, x, y, z) \rightarrow (t, -x, -y, -z)$  y no hay ningún experimento en electromagnetismo clásico que exhiba este comportamiento, como si demostró, por ejemplo, el experimento de Wu para interacciones débiles.

- (c) Que la acción permanezca invariante implica que la densidad Lagrangiana puede diferir, a lo sumo, en una 4-divergencia de una función,  $\partial_\mu F(x^\mu)$ , que al integrar en un volumen  $\tau$  resulta en un término sobre la superficie  $\partial\tau$  donde la variación del potencial  $\delta A^\mu$  será nula al aplicar el principio de Hamilton por construcción. Esto implica que la densidad Lagrangiana puede tener términos de la forma  $\partial_\mu F(x^\mu)$  al aplicar transformaciones gauge, aunque no sean invariantes gauge. Cabe esperar que un término de interacción entre los campos y las fuentes sea del tipo  $J^\mu A_\mu$ , donde  $J^\mu(x^\nu) = (\rho, \vec{j})$  es el 4-vector densidad de corriente. Bajo transformaciones gauge, un término de esta índole resulta en una diferencia en la densidad Lagrangiana

$$\mathcal{L}'_{EM}(A^\mu, \partial^\mu A^\mu) = \mathcal{L}'_{EM}(A^\mu, \partial^\mu A^\mu) + J^\mu(x^\nu) \partial_\mu f(x^\nu). \quad (3.15)$$

Este término resultará en un término de frontera si suponemos  $\partial_\mu J^\mu = 0$ , es decir, el vector  $J_\mu$  cumple la ecuación de continuidad, lo cual encaja en la intuición física si lo interpretamos como el vector de las fuentes. En tal caso,

$$\partial_\mu (J^\mu(x^\nu) f(x^\nu)) = \partial_\mu J^\mu(x^\nu) f(x^\nu) + J^\nu(x^\nu) \partial_\mu f(x^\nu) = J^\nu(x^\nu) \partial_\mu f(x^\nu) \quad (3.16)$$

---

<sup>6</sup>Exigir que  $\mathcal{L}$  sea escalar de Lorentz no contradice lo expuesto en §3.1 ya que de ser la métrica  $g_{\mu\nu} \neq \eta_{\mu\nu}$ , los productos escalares de los que depende  $\mathcal{L}$  dejarán de ser escalares Lorentz por construcción. Esto implica que las ecuaciones de movimiento dependerán de la métrica usada, lo que acopla electromagnetismo y relatividad general.

Con todo esto en mente, cabe esperar que exista un término libre, que describe la naturaleza homogénea de la teoría  $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$  y otro que describa la interacción campo-materia de la forma  $J^\mu A_\mu$ , resultando en

$$\mathcal{L}(A_\mu, \partial_\mu A_\nu) = C_1 F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + C_2 J^\mu A_\mu, \quad (3.17)$$

con  $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$  constantes. Estas constantes son fijadas al obtener las ecuaciones del movimiento, comparando con observables experimentales. No obstante, para no arrastrarlas, vamos a tomar los valores  $C_1 = -1/4$  y  $C_2 = -1$  en unidades naturales ( $c = 1$ ), elección que resulta en las ecuaciones de Maxwell en las mismas unidades, las cuales encajan con la experiencia experimental. Por tanto,

$$\mathcal{L}_{EM}(A_\mu, \partial_\mu A_\nu) = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - J^\mu A_\mu. \quad (3.18)$$

Cabe notar que las imposiciones establecidas no impiden la aparición de términos del tipo  $(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu})^m$ , con  $m \in \mathbb{N}$ ,  $m > 1$ . No obstante, veremos que el lagrangiano propuesto caracteriza satisfactoriamente la teoría.

### 3.3.1. 4-forma Lagrangiana electromagnética

En esta sección se procede a reescribir la densidad Lagrangiana electromagnética en términos de formas diferenciales. Discusiones similares pueden ser encontradas en [15]. Para ello, consideremos un potencial electromagnético, representado por una 1-forma  $A = A_\mu dx^\mu$  en vez del 4-vector  $A_\mu = (\phi, \vec{A})$ . Definimos la 2-forma Faraday como  $F := dA$  análogamente al tensor  $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ . Partimos de la densidad Lagrangiana  $\mathcal{L}_{EM}$  en notación tensorial, expresión (3.18) y, usando el operador  $\star$ , lo escribimos en términos de formas diferenciales. Comenzando por  $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ , un candidato intuitivo para reescribir término es  $F \wedge \star F$ , por tanto inspeccionamos esta cantidad. Comencemos escribiendo el tensor de Faraday en una base  $\{dx^0, dx^1, dx^2, dx^3\}$  de las formas diferenciales en el espacio tangente  $T_x\mathcal{M}$  de una variedad Lorentziana  $(\mathcal{M}, g)$ ,

$$F = \frac{1}{2!} F_{\alpha_0\alpha_1} dx^{\alpha_0} \wedge dx^{\alpha_1}, \quad (3.19)$$

donde el factor  $1/2!$  tiene en cuenta las diferentes permutaciones de los índices. El dual  $\star F$  es

$$\star F = \frac{1}{2!} \frac{\sqrt{-g}}{2!} \underbrace{g^{\gamma_0\beta_0} g^{\gamma_1\beta_1} F_{\gamma_0\beta_1}}_{F^{\gamma_0\gamma_1}} \epsilon_{\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3} dx^{\gamma_2} \wedge dx^{\gamma_3}. \quad (3.20)$$

Ahora bien,

$$F \wedge \star F = \frac{\sqrt{-g}}{8} F_{\alpha_0\alpha_1} F^{\gamma_0\gamma_1} \epsilon_{\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3} dx^{\alpha_0} \wedge dx^{\alpha_1} \wedge dx^{\gamma_2} \wedge dx^{\gamma_3}. \quad (3.21)$$

Usando las definiciones (2.23) y (2.21), podemos expresar esto en términos del elemento de volumen,  $dx^\alpha \wedge dx^\beta \wedge dx^\gamma \wedge dx^\delta = -\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 = -\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} d^4x$ , se tiene

$$F \wedge \star F = -\frac{\sqrt{-g}}{8} F_{\alpha_0\alpha_1} F^{\gamma_0\gamma_1} \epsilon_{\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3} \epsilon^{\alpha_0\alpha_1\gamma_2\gamma_1} d^4x. \quad (3.22)$$

En lo sucesivo, se usa la contracción de los símbolos de Levi-Civita generalizados, es decir, la ecuación (2.11) para  $d = 4$  y  $n = 2$ , es decir  $\epsilon_{\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3}\epsilon^{\alpha_0\alpha_1\gamma_2\gamma_3} = -2(\delta_{\gamma_0}^{\alpha_0}\delta_{\gamma_1}^{\alpha_1} - \delta_{\gamma_1}^{\alpha_0}\delta_{\gamma_0}^{\alpha_1})$ , de manera que

$$F \wedge \star F = \frac{\sqrt{-g}}{4} F_{\alpha_0\alpha_1} F^{\gamma_0\gamma_1} (\delta_{\gamma_0}^{\alpha_0}\delta_{\gamma_1}^{\alpha_1} - \delta_{\gamma_1}^{\alpha_0}\delta_{\gamma_0}^{\alpha_1}) d^4x = \frac{\sqrt{-g}}{4} (F_{\alpha_0\alpha_1} F^{\alpha_0\alpha_1} - F_{\alpha_0\alpha_1} F^{\alpha_1\alpha_0}) d^4x. \quad (3.23)$$

Usando que  $F^{\alpha_1\alpha_0} = -F^{\alpha_0\alpha_1}$  y renombrando los índices  $\{\alpha_0 \rightarrow \mu, \alpha_1 \rightarrow \nu\}$ , la expresión final es

$$F \wedge \star F = \frac{1}{2} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \sqrt{-g} d^4x = \frac{1}{2} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} dv_4. \quad (3.24)$$

Este resultado es similar al esperado salvo por

- (a) En la expresión de  $F \wedge \star F$  en términos de  $d^4x$  aparece un factor  $\sqrt{-g}$  que no está presente en la expresión (3.18). En la literatura, este término suele añadirse *artificialmente* a cualquier densidad lagrangiana para acoplarla a la teoría de la Relatividad General usando el formalismo de densidades tensoriales. Esencialmente, la adición de este término hace que la integración sobre el espacio sea covariante. Debido al formalismo matemático usado, este término emerge de manera *natural*.
- (b) Cuando el término  $\sqrt{-g}$  se absorbe en la 4-forma  $dv_4$ , vemos que  $F \wedge \star F$  no es más que la 4-forma que nos permite integrar la cantidad  $F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$  en toda una variedad Lorentziana  $\mathcal{M}$  de manera que el resultado es independiente del sistema de coordenadas elegido.
- (c) Hay un factor  $1/2$ , fruto de como se define la 2-forma  $F$ .

Concretamente, de los apartados (a) y (b) inducimos que el uso de formas diferenciales para modelar densidades Lagrangianas sobre espacio-tiempos (variedades) con curvatura no nula es una manera natural de relacionarlas a la geometría, causante de la gravedad. Respecto al término  $A \wedge \star J$ , surgen pocas sorpresas, ya que para  $A = A_{\alpha_0} dx^{\alpha_0}$  y  $J = J_{\beta_0} dx^{\beta_0}$  se tiene

$$\star J = \frac{\sqrt{-g}}{3!} g^{\lambda_0\beta_0} J_{\beta_0} \epsilon_{\lambda_0\lambda_1\lambda_2\lambda_3} dx^{\lambda_1} \wedge dx^{\lambda_2} \wedge dx^{\lambda_3}. \quad (3.25)$$

De manera análoga a como se procede para  $F \wedge \star F$ , se tiene

$$\begin{aligned} A \wedge \star J &= \frac{\sqrt{-g}}{3!} A_{\alpha_0} J^{\lambda_0} \epsilon_{\lambda_0\lambda_1\lambda_2\lambda_3} dx^{\alpha_0} \wedge dx^{\lambda_1} \wedge dx^{\lambda_2} \wedge dx^{\lambda_3} \\ &= -\frac{\sqrt{-g}}{3!} A_{\alpha_0} J^{\lambda_0} \left( \epsilon_{\lambda_0\lambda_1\lambda_2\lambda_3} \epsilon^{\alpha_0\lambda_1\lambda_2\lambda_3} \right) d^4x \\ &= -\frac{\sqrt{-g}}{3!} A_{\alpha_0} J^{\lambda_0} \left( (-1)^1 3! \delta_{\lambda_0}^{\alpha_0} \right) d^4x \\ &= A_{\alpha_0} J^{\alpha_0} \sqrt{-g} d^4x \\ &= A_{\mu} J^{\mu} dv_4, \end{aligned} \quad (3.26)$$

dónde vuelve a aparecer el término  $\sqrt{-g} d^4x = dv_4$  que nos permite integrar en todo el espacio. Juntando las expresiones (3.24) y (3.26) podemos reescribir el lagrangiano electromagnético puro (3.18) como una 4-forma lagrangiana que incluye la interacción geometría-electromagnetismo,

$$\mathcal{L}_{EM-G}[A, dA, g_{\mu\nu}] = -\frac{1}{2} F \wedge \star F - A \wedge \star J. \quad (3.27)$$

Remarcablemente,  $\mathcal{L}_{EM-G}$ , depende de la métrica  $g_{\mu\nu}$  vía el operador  $\star$  de Hodge.

### 3.4. Deducción de las Ecuaciones de Maxwell

Esta sección ha sido desarrollada siguiendo ideas de [15] y [4]. Para aplicar el principio de Hamilton, consideremos una variación infinitesimal de la 1-forma Faraday  $A' = A + \delta A$  sobre un espacio-tiempo arbitrario descrito por la variedad Lorentziana  $(\mathcal{M}, g)$ , donde se exige que  $\delta A = 0$  sobre todo  $\partial\mathcal{M}$ , como se representa en la figura 3. La forma Faraday perturbada es  $F' = d(A + \delta A) = dA + d\delta A := F + \delta F$ . Denotamos la acción del Lagrangiano sin perturbar como  $S$  y  $S + \delta S$  la acción del Lagrangiano perturbado, de modo que

$$S = \int_{\mathcal{M}} \mathcal{L}_{EM-G}(A), \quad S + \delta S = \int_{\mathcal{M}} \mathcal{L}_{EM-G}(A + \delta A). \quad (3.28)$$

Introducimos en la expresión (3.28) el lagrangiano de la ecuación (3.27):

$$\begin{aligned} S + \delta S &= \int_{\mathcal{M}} -\frac{1}{2} F' \wedge \star F' - A' \wedge \star J \\ &= \int_{\mathcal{M}} -\frac{1}{2} [(F + d\delta A) \wedge \star (F + d\delta A)] - (A + d\delta A) \wedge \star J \\ &= \int_{\mathcal{M}} -\frac{1}{2} [F \wedge \star F + F \wedge \star d\delta A + d\delta A \wedge \star F + d\delta A \wedge \star d\delta A] - (A + \delta A) \wedge \star J \\ &= \underbrace{\int_{\mathcal{M}} -\frac{1}{2} F \wedge \star F - A \wedge \star J}_S + \int_{\mathcal{M}} -\frac{1}{2} \left[ \underbrace{F \wedge \star d\delta A}_{d\delta A \wedge \star F} + d\delta A \wedge \star F + \mathcal{O}(\delta A^2) \right] - \delta A \wedge \star J. \end{aligned}$$

Ahora, seguimos desarrollando para  $\delta S$  usando el concepto de coderivación, según la definición 2.27:

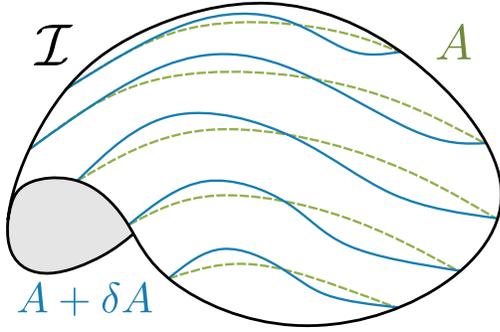


Figura 3: Esquema del principio de Hamilton.  $\mathcal{I}$  es una 2-subvariedad del espacio-tiempo  $\mathcal{M}$ ,  $A$  y  $A + \delta A$  son la 1-forma Faraday sin perturbar y perturbada, respectivamente. Nótese que  $\delta A = 0$  sobre  $\partial\mathcal{M} \supset \partial\mathcal{I}$  por construcción al aplicar el principio de Hamilton.

$$\delta S = \int_{\mathcal{M}} -d\delta A \wedge \star F - \delta A \wedge \star J + \mathcal{O}(\delta A^2) \quad (3.29)$$

$$= \int_{\mathcal{M}} -\delta A \wedge \star d^\dagger F - \delta A \wedge \star J + \mathcal{O}(\delta A^2) \quad (3.30)$$

$$= \int_{\mathcal{M}} \delta A \wedge d \star F - \delta A \wedge \star J + \mathcal{O}(\delta A^2) \quad (3.31)$$

$$= \int_{\mathcal{M}} \delta A \wedge (d \star F - \star J) + \mathcal{O}(\delta A^2) = 0 \quad (3.32)$$

Dónde se ha usado que, para la 2-forma Faraday  $F$  ( $k = 2$ ) sobre 4-variedades Lorentzianas ( $n = 4$ ,  $s = -1$ )

$$\star d^\dagger F = \star^2 d \star F = s (-1)^{k(n-k)} d \star F = -d \star F \quad (3.33)$$

Imponiendo  $\delta S = 0 \forall \delta A$ , se llega a la ecuación de Maxwell inhomogénea:

$$\boxed{d \star F = \star J.} \quad (3.34)$$

Esta ecuación nos dice que *el número de tubos duales de Faraday que acaban en un elemento de volumen es la cantidad de carga eléctrica en el volumen* [4]. Otra forma elegante de la ecuación (3.34) puede ser obtenida directamente de la expresión (3.30) para  $\delta S$ ,

$$d^\dagger F = -J. \quad (3.35)$$

La otra ecuación de Maxwell viene dictaminada por la derivada exterior y la elección de un potencial. Como  $F = dA$ , entonces  $d^2A = 0$ , lo que da lugar a la ecuación de Maxwell homogénea,

$$\boxed{dF = 0}. \quad (3.36)$$

En las precisas palabras de [4], esta nos dice que *ningún tubo de Faraday tiene fin*. Esta interpretación geométrica de la ecuación (3.36) puede apreciarse en la Figura 4 para el caso de una carga puntual. Nótese que la ecuación homogénea (3.36) únicamente emplea la derivada exterior,  $d$ , la cual es independiente de la métrica. Además,  $dF = d^2A = \partial_c \partial_b A_a dx^c \wedge dx^b \wedge dx^a = 0$ , que, en notación de índices, resulta en  $0 = \partial_c \partial_b A_a \varepsilon^{cba} = \partial_c \partial_b A_a - \partial_c \partial_a A_b + \partial_b \partial_c A_a - \partial_b \partial_a A_c + \partial_a \partial_c A_b + \partial_a \partial_b A_c$ , que, usando el tensor de Faraday resulta en la identidad de Bianchi,

$$\partial_a F_{bc} + \partial_b F_{ca} + \partial_c F_{ab} = 0. \quad (3.37)$$

Por todo esto se dice que la ecuación homogénea *no tiene contenido físico*, ya que es consecuencia de haber formulado la teoría en términos de un 4-potencial. Por otro lado, la ecuación inhomogénea (3.34) depende de la métrica vía el operador  $\star$ , por tanto ya sabemos como la métrica afecta al electromagnetismo. No obstante, queda por determinar como el electromagnetismo afecta a la métrica. Por el momento, consideremos a modo de ejemplo para visualizar las ecuaciones  $\star d\star F = \star J$  y  $dF = 0$ , vamos a considerar una carga puntual  $q$  en el origen y despreciamos la gravedad. La métrica plana en coordenadas esféricas  $\{t, r, \theta, \phi\}$  es  $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, +1, r^2, r^2 \sin^2 \theta)$ . Tenemos que  $A = qr^{-1}dt$ , por tanto la forma Faraday  $F = dA$  y su dual, los cuales quedan esquematizados en la figura 4, son [4]

$$F = q \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \right) dr \wedge dt = \frac{q}{r^2} dt \wedge dr \implies \star F = q \sin(\theta) d\theta \wedge d\phi. \quad (3.38)$$

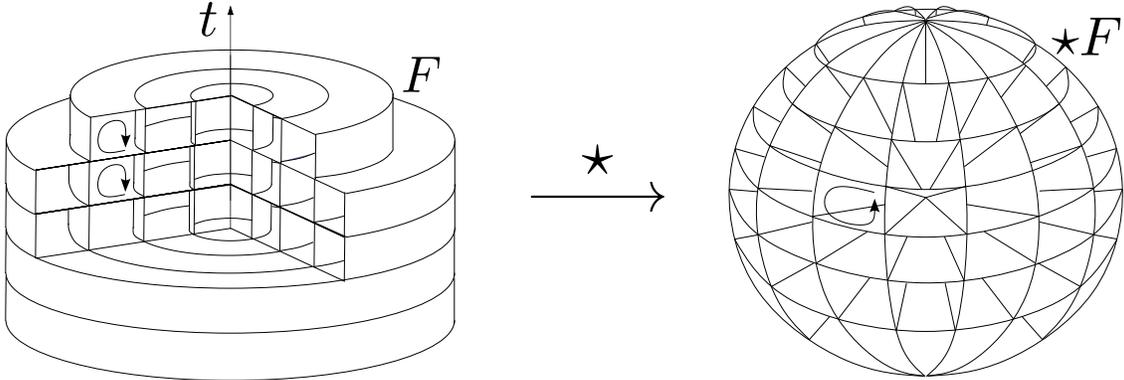


Figura 4: Formas  $F$  y  $\star F$  para una carga puntual en el origen, despreciando la gravedad. En el esquema de  $F$  se ha suprimido la coordenada  $\theta$ , mientras que en la de  $\star F$  se ha suprimido el tiempo. Los *tubos de Faraday* no tienen fin, mientras que los *tubos duales* acaban donde se ubica la carga. Las flechas indican el orden con el que se multiplican las formas base.

### 3.5. Ecuaciones de Einstein-Maxwell. Interacción electrogravitatoria.

En esta sección se sigue principalmente [10], junto a desarrollos de [2] y [4]. Consideremos una 4-forma Lagrangiana *electrogravitatoria*,

$$\mathcal{L}_{EG}(A, dA, g^{\mu\nu}, \partial_\mu g^{\mu\nu}) = \mathcal{L}_{\text{geom}} + \mathcal{L}_{EM-G} = \frac{1}{2\kappa} R dv_4 - \frac{1}{2} F \wedge \star F - A \wedge \star J. \quad (3.39)$$

En vista de los resultados (3.24) y (3.26), podemos reescribir

$$\mathcal{L}_{EG} = \left( \frac{1}{2\kappa} R - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - A_\mu J^\nu \right) dv_4. \quad (3.40)$$

Al integrar la 4-forma Lagrangiana sobre una 4-variedad Lorentziana  $\mathcal{M}$ , surge la acción

$$S_{EG}[A, g^{\mu\nu}] = \int_{\mathcal{M}} \frac{1}{2\kappa} R dv_4 - \frac{1}{2} F \wedge \star F - A \wedge \star J. \quad (3.41)$$

Como ni la curvatura escalar  $R$  ni la 4-forma  $dv_4$  dependen explícitamente del potencial electromagnético  $A$ , el primer término se anula al aplicar el principio de Hamilton respecto a  $A$

$$\frac{\delta S_{EG}}{\delta A} = \int_{\mathcal{M}} \frac{1}{2\kappa} \frac{\delta(R dv_4)}{\delta A} - \frac{\delta}{\delta A} \left( \frac{1}{2} F \wedge \star F + A \wedge \star J \right) \quad (3.42)$$

$$- \int_{\mathcal{M}} \frac{\delta}{\delta A} \left( \frac{1}{2} F \wedge \star F + A \wedge \star J \right). \quad (3.43)$$

Ahora bien, esto es exactamente el mismo cálculo realizado en §3.4, por tanto se llegan a las mismas ecuaciones de Maxwell al imponer el principio de Hamilton,<sup>7</sup>

$$\frac{\delta S_{EG}}{\delta A} = 0 \implies \star d \star F = \star J. \quad (3.44)$$

El razonamiento mediante el cual se llega a ecuación de Maxwell homogénea,  $dF = 0$ , en §3.4 también sigue siendo válido, por lo que concluimos que  $\mathcal{L}_{EG}$  también resulta en las ecuaciones de Maxwell. Ahora bien, la variación de la acción respecto a la variación de la métrica debería resultar en las ecuaciones de campo con un tensor energía-momento electromagnético. Consideremos

$$\frac{\delta S_{EG}}{\delta g^{\mu\nu}} = \frac{\delta}{\delta g^{\mu\nu}} \int_{\mathcal{M}} \left( \frac{1}{2\kappa} R - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - A_\mu J^\nu \right) dv_4 \quad (3.45)$$

$$= \int_{\mathcal{M}} \frac{\delta}{\delta g^{\mu\nu}} \left( \frac{1}{2\kappa} R + \mathcal{L}_{EM} \right) dv_4 + \left( \frac{1}{2\kappa} R - \mathcal{L}_{EM} \right) \frac{\delta dv_4}{\delta g^{\mu\nu}}. \quad (3.46)$$

Se varía respecto a  $g^{\mu\nu}$  y no respecto a  $g_{\mu\nu}$  porque están relacionadas. Concretamente, la métrica por su inversa es la identidad,  $g_{\mu\nu} g^{\nu\rho} = \delta_\mu^\rho$ . Esto implica  $g_{\mu\nu} g^{\nu\mu} = \delta_\mu^\mu = \dim(\mathcal{M}) = 4$ . Como la dimensión no puede variar al variar la métrica,  $0 = \delta \dim(\mathcal{M}) = \delta g^{\mu\nu} g_{\mu\nu} + g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu}$ , por lo que  $g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} = -g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu}$ . Dicho esto, vamos a ir calculando las diferentes variaciones término a término. Comencemos calculando  $\delta dv_4 / \delta g^{\mu\nu}$  usando la expresión de  $dv_4$ ,

$$\frac{\delta dv_4}{\delta g^{\mu\nu}} = \frac{\delta \sqrt{-g}}{\delta g^{\mu\nu}} d^4 x. \quad (3.47)$$

La variación del determinante de la métrica queda explícitamente calculada en el apéndice §D.3 y su expresión es

$$\delta \det(g) = -\det(g) g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \implies \delta \sqrt{-g} = -\frac{\sqrt{-g}}{2} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}, \quad (3.48)$$

lo que nos permite llegar a la variación de la 4-forma  $dv_4$ ,

$$\frac{\delta dv_4}{\delta g^{\mu\nu}} = -\frac{\sqrt{-g}}{2} g_{\mu\nu} d^4 x = -\frac{1}{2} g_{\mu\nu} dv_4. \quad (3.49)$$

<sup>7</sup>Los cocientes como  $\delta S_{EG} / \delta A$  o  $\delta dv_4 / \delta g^{\mu\nu}$  no son derivadas, sino cocientes entre variaciones infinitesimales.

Ahora, para llegar a la variación de la curvatura escalar  $R$  respecto a la variación de la métrica inversa se requiere de un largo y tedioso cálculo tensorial que el lector o lectora puede encontrar en el apéndice §D.2, donde se obtiene la expresión

$$\delta R = R_{\sigma\nu}\delta g^{\sigma\nu} + \nabla^\sigma \left( \nabla_\sigma g^{\lambda\nu} \delta g_{\lambda\nu} + \nabla^\lambda \delta g_{\sigma\lambda} \right). \quad (3.50)$$

Nótese que en este término se emplean las variaciones  $\delta g^{\mu\nu}$  y  $\delta g_{\mu\nu}$ , a pesar de que sabemos que están relacionadas. Esto facilita ver que el término dentro de la derivada covariante  $\nabla^\sigma$  puede ser interpretado como los coeficientes  $B_\sigma$  de una 1-forma  $B = B_\sigma dx^\sigma$ , de manera que

$$\delta R = R_{\sigma\nu}\delta g^{\sigma\nu} + \nabla^\sigma B_\sigma \implies \int_{\mathcal{M}} \delta R dv_4 = \int_{\mathcal{M}} R_{\sigma\nu}\delta g^{\sigma\nu} dv_4 + \int_{\mathcal{M}} \nabla^\sigma B_\sigma dv_4. \quad (3.51)$$

Además, en virtud del teorema 2.29, si  $B = B_\sigma dx^\sigma$  es una 1-forma,  $\nabla^\sigma B_\sigma = (d^\dagger B) = -\star d \star B$  serán los coeficientes de la coderivada de  $B$  (la cual es una 0-forma). Usando este hecho, podemos usar el teorema de Stokes-Cartan en el segundo sumando del lado derecho de (3.51),

$$\int_{\mathcal{M}} \nabla^\sigma B_\sigma dv_4 = \int_{\mathcal{M}} d^\dagger B \wedge dv_4 = \int_{\mathcal{M}} d^\dagger B \wedge \star 1 = \int_{\mathcal{M}} 1 \wedge \star d^\dagger B, \quad (3.52)$$

dónde en el último paso se ha usado la conmutatividad del producto interior, Lema (2.26). Ahora bien,  $1 \wedge \omega = \omega$  para cualquier forma  $\omega$  y, para la 1-forma  $B$  en 4-variedades Lorentzianas se tiene  $d^\dagger B = -\star d \star B$  y, además,  $\star\star = \pm 1$ , por las definiciones (2.27) y (2.24), por tanto

$$\int_{\mathcal{M}} \nabla^\sigma B_\sigma dv_4 = \int_{\mathcal{M}} \star d^\dagger B = \pm \int_{\mathcal{M}} d \star B = \pm \int_{\partial\mathcal{M}} \star B, \quad (3.53)$$

dónde en el último paso se ha usado el teorema de Stokes-Cartan (teorema 2.19) para llegar a la conclusión de que este término es un término de frontera. Si suponemos que la variedad es cerrada, lo que implica  $\partial\mathcal{M} = \emptyset$ , el término se anula<sup>8</sup>, podemos descartarlo y queda

$$\delta R = R_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} \implies \frac{\delta R}{\delta g^{\mu\nu}} = R_{\mu\nu}. \quad (3.54)$$

Sustituyendo las expresiones de las variaciones (3.49) y (3.54) en (3.46), llegamos a

$$\frac{\delta S_{EG}}{\delta g^{\mu\nu}} = \int_{\mathcal{M}} \left( \frac{1}{2\kappa} R_{\mu\nu} + \frac{\delta \mathcal{L}_{EM}}{g^{\mu\nu}} \right) dv_4 - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \left( \frac{1}{2\kappa} R + \mathcal{L}_{EM} \right) dv_4. \quad (3.55)$$

Si definimos el tensor energía-momento  $T_{\mu\nu}$  como

$$T_{\mu\nu} := -2 \frac{\delta \mathcal{L}_{EM}}{\delta g^{\mu\nu}} + g_{\mu\nu} \mathcal{L}_{EM}, \quad (3.56)$$

sustituimos (3.56) en (3.55) y reorganizamos, obtenemos

$$\delta S_{EG} = \int_{\mathcal{M}} \left( \frac{1}{2\kappa} R_{\mu\nu} - \frac{R}{4\kappa} g_{\mu\nu} - \frac{1}{2} T_{\mu\nu} \right) dv_4 \delta g^{\mu\nu}. \quad (3.57)$$

<sup>8</sup>Esto no es el caso si  $\partial\mathcal{M} \neq \emptyset$ , ya que  $B$  depende tanto de  $\delta g^{\mu\nu}$  (el cual se anula sobre  $\delta\mathcal{M}$  al aplicar el principio de Hamilton) como de  $\delta\partial_\lambda g^{\mu\nu} = \partial_\lambda \delta g_{\mu\nu}$ , el cual no necesariamente se anula. Para subsanar esto, se puede añadir un término a  $S_{EH}$  conocido como el término de frontera de Gibbons-Hawking-York, el cual merece una discusión más allá de un pie de página.

Ahora, al aplicar el principio de Hamilton, exigimos que  $\delta S_{EG} = 0$  para todo  $\delta g^{\mu\nu}$ , lo cual lleva a las ecuaciones de campo de Einstein:

$$\boxed{R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}} \quad (3.58)$$

Para calcular el tensor energía-momento electromagnético, se necesita  $\delta \mathcal{L}_{EM}/\delta g^{\mu\nu}$ , el cual se calcula con detalle en el apéndice §D.4 y viene dado por

$$\frac{\delta \mathcal{L}_{EM}}{\delta g^{\mu\nu}} = -\frac{1}{2}F_{\mu\alpha}g^{\alpha\beta}F_{\nu\beta} - A_{\mu}J_{\nu}. \quad (3.59)$$

Sustituyendo en la expresión (3.56),

$$T_{\mu\nu} = F_{\mu\alpha}g^{\alpha\beta}F_{\nu\beta} - \frac{1}{4}g_{\mu\nu}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta} + 2A_{\mu}J_{\nu} - g_{\mu\nu}A_{\alpha}J^{\beta}. \quad (3.60)$$

Esto proporciona la interacción gravitación-electromagnetismo en relatividad general, con lo que se cumple la premisa del trabajo.

### 3.6. Límite clásico

Vamos a proceder a comprobar que la formulación a la que se ha llegado se reduce a las Ecuaciones de Maxwell en su forma clásica cuando nos encontramos en un espacio-tiempo plano. Se sigue la línea de [3]. Consideremos un espacio-tiempo de Minkowski descrito por la variedad Lorentziana  $\mathcal{M} = (\mathbb{R}^4, \eta)$  con  $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$ . Sea  $A = -\phi dt + A_x dx + A_y dy + A_z dz$  la 1-forma del potencial electromagnético. La 2-forma Faraday viene dada por  $F = dA$ , por tanto

$$F = dA = d(-\phi dt + A_x dx + A_y dy + A_z dz) \quad (3.61)$$

$$= -d\phi \wedge dt + dA_x \wedge dx + dA_y \wedge dy + dA_z \wedge dz \quad (3.62)$$

Usando la propiedad (b) del lema 2.15, computando las 1-formas  $d\phi$ ,  $dA_x$ ,  $dA_y$ ,  $dA_z$  y simplificando:

$$F = (\partial_x \phi + \partial_t A_x) dt \wedge dx + (\partial_y \phi + \partial_t A_y) dt \wedge dy + (\partial_z \phi + \partial_t A_z) dt \wedge dz \quad (3.63)$$

$$+ (\partial_x A_y - \partial_y A_x) dx \wedge dy + (\partial_x A_z - \partial_z A_x) dx \wedge dz + (\partial_y A_z - \partial_z A_y) dz \wedge dy. \quad (3.64)$$

En analogía con la formulación electromagnética clásica en términos de un 4-potencial vectorial  $(\phi, \vec{A})$ , donde

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \partial_t \vec{A}, \quad \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}. \quad (3.65)$$

Identificamos los componentes de los campos  $\vec{E}$  y  $\vec{B}$ , de manera que

$$F = -E_x dt \wedge dx - E_y dt \wedge dy - E_z dt \wedge dz + B_z dx \wedge dy - B_y dx \wedge dz + B_x dy \wedge dz. \quad (3.66)$$

Una vez tenemos la 2-forma Faraday, vamos a computar las ecuaciones de Maxwell con la nueva formulación, comenzando por la ecuación homogénea (3.36). El detalle de estos cálculos puede encontrarse en el Apéndice C.

$$dF = (\partial_t B_z + \partial_x E_y - \partial_y E_x) dt \wedge dx \wedge dy - (\partial_t B_y + \partial_z E_x - \partial_x E_z) dt \wedge dx \wedge dz \quad (3.67)$$

$$+ (\partial_t B_x + \partial_y E_z - \partial_z E_y) dt \wedge dy \wedge dz + (\partial_x B_x + \partial_y B_y - \partial_z B_z) dt \wedge dx \wedge dy = 0. \quad (3.68)$$

Como  $dF = 0$ , los coeficientes que acompañan a las 3-formas que conforman base tienen que ser todos nulos. Además, usando notación vectorial, se recuperan las ecuaciones (1.2) y (1.3), las leyes de Gauss para el campo magnético y Faraday, respectivamente:

$$\left. \begin{aligned} \partial_t B_z + \partial_x E_y - \partial_y E_x &= 0 \\ \partial_t B_y + \partial_z E_x - \partial_x E_z &= 0 \\ \partial_t B_x + \partial_y E_z - \partial_z E_y &= 0 \end{aligned} \right\} \iff \partial_t \vec{B} + \vec{\nabla} \times \vec{E} = 0 \quad (3.69)$$

$$\partial_x B_x + \partial_y B_y - \partial_z B_z \iff \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0. \quad (3.70)$$

Por otro lado, la ecuación (3.34) nos proporciona las ecuaciones de Maxwell inhomogéneas clásicas. Para verlo, primero, calculemos  $\star F$ ,

$$\star F = \star(-E_x dt \wedge dx - E_y dt \wedge dy - E_z dt \wedge dz + B_z dx \wedge dy - B_y dx \wedge dz + B_x dy \wedge dz) \quad (3.71)$$

$$= E_x dy \wedge dz - E_y dx \wedge dz + E_z dx \wedge dy + B_z dt \wedge dz + B_y dt \wedge dy + B_x dt \wedge dx. \quad (3.72)$$

Calculando la derivada exterior, lo cual se hace con detalle en el Apéndice §C, se llega a

$$\begin{aligned} d\star F &= (\partial_t E_z + \partial_y B_x - \partial_x B_y) dt \wedge dx \wedge dy - (\partial_t E_y + \partial_x B_z - \partial_z B_x) dt \wedge dx \wedge dz \\ &\quad + (\partial_t E_x + \partial_z B_y - \partial_y B_z) dt \wedge dy \wedge dz + (\partial_x E_x + \partial_y E_y + \partial_z E_z) dx \wedge dy \wedge dz. \end{aligned} \quad (3.73)$$

Por otro lado, en analogía con el 4-vector fuente  $J = (\rho, \vec{J})$ , la 1-forma fuente tiene la forma

$$J = \rho dt - J_x dx - J_y dy - J_z dz, \quad (3.74)$$

tomando su dual de Hodge,

$$\star J = -\rho dx \wedge dy \wedge dz - J_x dt \wedge dy \wedge dz + J_y dt \wedge dx \wedge dz - J_z dt \wedge dx \wedge dy. \quad (3.75)$$

Igualando  $d\star F = \star J$ , tenemos que los coeficientes que acompañan a las 3-formas base tienen que ser iguales, por tanto se llega a:

$$\left. \begin{aligned} \partial_t E_x + \partial_z B_y - \partial_y B_z &= -J_x \\ \partial_t E_y + \partial_x B_z - \partial_z B_x &= -J_y \\ \partial_t E_z + \partial_y B_x - \partial_x B_y &= -J_z \end{aligned} \right\} \iff \nabla \times \vec{B} = \mu_0 (\vec{J} + \partial_t \vec{E}), \quad (3.76)$$

$$\partial_x E_x + \partial_y E_y + \partial_z E_z = \rho \iff \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho \quad (3.77)$$

Que son las leyes de Gauss para  $\vec{E}$  y de Ampère, las ecuaciones de Maxwell (1.4) y (1.1) respectivamente. Cabe notar que, para que la suposición de que nos encontramos en un espacio-tiempo plano  $(\mathbb{R}^4, \eta)$  sea correcta, se necesita un tensor energía-momento  $T_{\mu\nu}$  tal que las ecuaciones de campo de Einstein resulten en la métrica de Minkowski, lo cual solamente sucede para  $A = J = 0$ , es decir, en ausencia de fuentes y campos. Esto corrobora el argumento de la sección §3.1, que motiva todo el trabajo.

## 4. Aplicaciones y Conclusiones

El formalismo aquí propuesto no representa la realidad física al completo, ya que no se tiene en cuenta la naturaleza cuántica de la radiación electromagnética. No obstante, da una descripción conjunta consistente de electromagnetismo clásico y gravitación. Una solución particularmente simple a las ecuaciones de Einstein-Maxwell se obtiene imponiendo un 4-potencial  $A = A_\mu dx^\mu$ , con  $A_\mu = (\phi, 0, 0, 0)$  y simetría esférica, llegando a la métrica de Reissner-Nordström [4],

$$ds^2 = - \left( 1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} \right) dt^2 + \left( 1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} \right)^{-1} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2), \quad (4.1)$$

dónde  $M$  es la masa de un cuerpo y  $Q$  la carga medida por un observador lejano en reposo. Esta puede ser usada para describir objetos cargados en ausencia de rotación. Para describir cuerpos cargados en rotación, existe la métrica de Kerr-Newman, la cual es más compleja [4]. Todo esto es útil para modelar estrellas o agujeros negros, como el de la figura 5.

El estudio del electromagnetismo clásico mediante formas diferenciales descrito en el presente trabajo es un buen punto de partida para el estudio de la amplia gama de teorías de campos que siguen el mismo formalismo matemático. Por ejemplo, la teoría de Yang-Mills, que surge precisamente como una generalización del electromagnetismo o la teoría de Chern-Simons son ejemplos de teorías gauge expresadas habitualmente en términos de formas diferenciales sobre variedades [10].

Además, las formas diferenciales nos proveen de una interpretación geométrica del electromagnetismo, proporcionando otro punto de vista y ampliando nuestro entendimiento sobre este. En las palabras de [4], *las formas diferenciales iluminan el electromagnetismo y el electromagnetismo ilumina las formas diferenciales*.

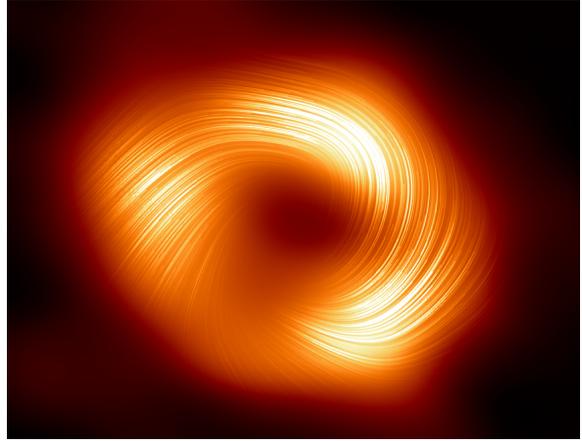


Figura 5: Fotografía del agujero negro Sagitario A\* con las *líneas de campo* de la polarización de la luz superpuestas, capturada por el Event Horizon Telescope. En ella, se aprecia los intensos campos magnéticos en forma de espiral alrededor del borde del agujero negro [5].

## †. Apéndices

### A. Demostración del Teorema 2.29

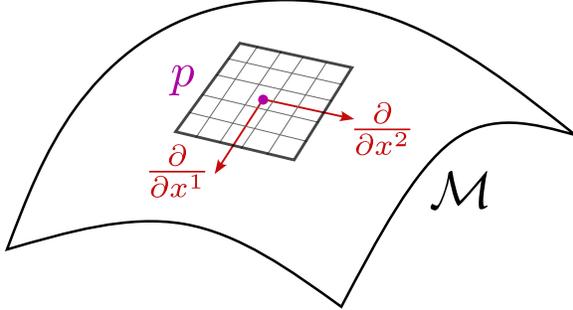


Figura 6: Visualización de las coordenadas normales  $(x^1, x^2)$  para un punto  $p$  de una 2-variedad  $\mathcal{M}$ . Los vectores  $\partial/\partial x^1, \partial/\partial x^2$  son cartesianos en  $p$ , ya que  $M$  es localmente plana.

En el presente apéndice se demuestra el teorema 2.29, de suma importancia al discutir los términos de frontera en las ecuaciones de campo de Einstein. Se utiliza para poder aplicar el teorema de Stokes–Cartan, el cual es formulado en términos de formas diferenciales para justificar que los términos de frontera resultan en una contribución nula a la acción en §3.5. La idea tras esta demostración es hacer uso de las coordenadas normales, identificadas en física como las coordenadas del marco de referencia inercial. Sin entrar en la definición matemáticamente rigurosa, las coordenadas normales en un punto  $p$  de una variedad Lorentziana  $(\mathcal{M}, g)$  son aquellas que son localmente planas en  $p$ , y consecuentemente verifican:

- (a) La métrica en el punto  $p$  es la de Minkowski,  $g_{\mu\nu}(p) = \eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$ .<sup>9</sup>
- (b) Consecuencia del punto anterior es que los símbolos de Christoffel son nulos en  $p$ , es decir,  $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda(p) = 0$ .
- (c) Que  $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda(p) = 0$  implica que las derivadas parciales primeras de la métrica son nulas. Para verlo, partamos de la condición de compatibilidad de la métrica, es decir, que la derivada covariante del tensor de la métrica sea cero,

$$\nabla_\sigma g_{\mu\nu} = \partial_\sigma g_{\mu\nu} - \Gamma_{\sigma\mu}^\lambda g_{\lambda\nu} - \Gamma_{\sigma\nu}^\lambda g_{\lambda\mu} = 0 \implies \partial_\sigma g_{\mu\nu} = \Gamma_{\sigma\mu}^\lambda g_{\lambda\nu} + \Gamma_{\sigma\nu}^\lambda g_{\lambda\mu}. \quad (\text{A.1})$$

Vemos que, si evaluamos en el punto  $p$  y usamos la propiedad (b), se llega a

$$\partial_\sigma g_{\mu\nu}(p) = \Gamma_{\sigma\mu}^\lambda(p) g_{\lambda\nu}(p) + \Gamma_{\sigma\nu}^\lambda(p) g_{\lambda\mu}(p) = 0. \quad (\text{A.2})$$

- (d) Para un punto arbitrario  $p$  en una 4-variedad Lorentziana siempre se puede encontrar un conjunto de coordenadas normales en ese punto.

Ahora bien, para demostrar

$$d^\dagger B = - \star d \star B = \nabla^\alpha b_\alpha, \quad (\text{A.3})$$

vamos a tomar las coordenadas normales en un punto  $p \in \mathcal{M}$  arbitrario donde los  $b_\alpha$  sean diferenciables y comprobar que ambos lados de la expresión son iguales. Esto facilita los cálculos ya que la derivada covariante en el punto  $p$ , donde  $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda(p) = 0$  y el espacio plano se reduce a la derivada típica. Como se puede argumentar lo mismo para todo punto  $p$  de la variedad, esto completará la demostración.

<sup>9</sup>Si la variedad fuera Riemanniana, la métrica sería cartesiana.

*Demostración.* Sea  $(\mathcal{M}, g)$  una variedad Lorentziana. Sea  $B = b_\alpha dx^\alpha$  una 1-forma diferencial. Sea  $p \in \mathcal{M}$  un punto dónde los  $b_\alpha$  son diferenciables y sean  $(x_0, x_1, x_2, x_3)$  las coordenadas normales en  $p$ , de manera que  $g_{\mu\nu}(p) = \eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$ ,  $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda(p) = 0$  y  $\partial_\sigma g_{\mu\nu}(p) = 0$ . Calculemos el lado derecho de la igualdad en  $p$ :

$$(\nabla^\alpha b_\alpha)(p) = (g^{\alpha\beta} \nabla_\beta b_\alpha)(p) = (g^{\alpha\beta} \partial_\beta b_\alpha - \Gamma_{\beta\alpha}^\lambda b_\lambda)(p) = \eta^{\alpha\beta} \partial_\beta b_\alpha(p) \quad (\text{A.4})$$

$$= -\frac{\partial b_0}{\partial x_0} + \frac{\partial b_1}{\partial x_1} + \frac{\partial b_2}{\partial x_2} + \frac{\partial b_3}{\partial x_3} \Big|_p. \quad (\text{A.5})$$

Este es el resultado esperado para un marco de referencia inercial en relatividad especial. Ahora, veamos el lado izquierdo de la igualdad evaluado en el mismo punto  $p$ . Como queremos  $(\star d \star B)(p)$ , comencemos calculando  $(\star B)(p)$  aplicando la definición del operador estrella (definición 2.22).

$$(\star B)(p) = \left( \frac{\sqrt{|g|}}{3!} g^{\alpha_0 \beta_0} b_{\alpha_0} \varepsilon_{\beta_0 \beta_1 \beta_2 \beta_3} dx^{\beta_1} \wedge dx^{\beta_2} \wedge dx^{\beta_3} \right) (p). \quad (\text{A.6})$$

Ahora, pasemos a calcular su derivada exterior, según la expresión (2.8),

$$(d \star B)(p) = \left[ d \left( \frac{\sqrt{|g|}}{3!} g^{\alpha_0 \beta_0} b_{\alpha_0} \varepsilon_{\beta_0 \beta_1 \beta_2 \beta_3} dx^{\beta_1} \wedge dx^{\beta_2} \wedge dx^{\beta_3} \right) \right] (p) \quad (\text{A.7})$$

$$= \left[ \frac{\partial}{\partial x^{\gamma_0}} \left( \frac{\sqrt{|g|}}{3!} g^{\alpha_0 \beta_0} b_{\alpha_0} \varepsilon_{\beta_0 \beta_1 \beta_2 \beta_3} \right) dx^{\gamma_0} \wedge dx^{\beta_1} \wedge dx^{\beta_2} \wedge dx^{\beta_3} \right] (p). \quad (\text{A.8})$$

Inspeccionemos con detenimiento la derivada del término entre paréntesis, aplicando la regla de la cadena.

$$\frac{\partial}{\partial x^{\gamma_0}} \left( \frac{\sqrt{|g|}}{3!} g^{\alpha_0 \beta_0} b_{\alpha_0} \varepsilon_{\beta_0 \beta_1 \beta_2 \beta_3} \right) = \frac{\partial}{\partial x^{\gamma_0}} \left( \frac{\sqrt{|g|}}{3!} \right) g^{\alpha_0 \beta_0} b_{\alpha_0} \varepsilon_{\beta_0 \beta_1 \beta_2 \beta_3} \quad (\text{A.9})$$

$$+ \frac{\sqrt{|g|}}{3!} \frac{\partial}{\partial x^{\gamma_0}} (g^{\alpha_0 \beta_0}) b_{\alpha_0} \varepsilon_{\beta_0 \beta_1 \beta_2 \beta_3} \quad (\text{A.10})$$

$$+ \frac{\sqrt{|g|}}{3!} g^{\alpha_0 \beta_0} \frac{\partial}{\partial x^{\gamma_0}} (b_{\alpha_0}) \varepsilon_{\beta_0 \beta_1 \beta_2 \beta_3}. \quad (\text{A.11})$$

Aún falta por aplicar una vez más el operador estrella. No obstante, como este es lineal y solamente actúa sobre las formas diferenciales, razonemos que va a suceder con cada sumando de esta derivada al evaluar en el punto  $p$ .

- (1) El primer sumando se anulará, ya que mediante la regla de la cadena

$$\frac{\partial}{\partial x^{\gamma_0}} \left( \frac{\sqrt{|g|}}{3!} \right) \Big|_p = \frac{\partial}{\partial g} \left( \frac{\sqrt{|g|}}{3!} \right) \frac{\partial g}{\partial g^{\mu\nu}} \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^{\gamma_0}} \Big|_p = 0, \quad (\text{A.12})$$

ya que en las coordenadas normales  $\partial g^{\mu\nu} / \partial x^{\gamma_0} \Big|_p = 0$ .

- (2) El segundo sumando también se anulará, ya que depende directamente de  $\partial g^{\alpha_0 \beta_0} / \partial x^{\gamma_0}$ , que al evaluar en  $p$  se anulará.
- (3) El tercer sumando no se anula, ya que recordando  $g^{\mu\nu}(p) = \eta^{\mu\nu}$  y  $|\eta| = 1$ ,

$$\frac{\sqrt{|g|}}{3!} g^{\alpha_0 \beta_0} \frac{\partial}{\partial x^{\gamma_0}} (b_{\alpha_0}) \varepsilon_{\beta_0 \beta_1 \beta_2 \beta_3} \Big|_p = \frac{1}{3!} \eta^{\mu\nu} \frac{\partial b_{\alpha_0}}{\partial x^{\gamma_0}} (p) \varepsilon_{\beta_0 \beta_1 \beta_2 \beta_3}. \quad (\text{A.13})$$

Llamemos  $c_{\gamma_0\beta_1\beta_2\beta_3}$  a la suma de los dos términos que se cancelan al evaluar en  $p$  en la expresión A.11. Entonces podemos escribir,

$$(d \star B)(p) = \left[ \left( c_{\gamma_0\beta_1\beta_2\beta_3} + \frac{\sqrt{|g|}}{3!} g^{\alpha_0\beta_0} \frac{\partial b_{\alpha_0}}{\partial x^{\gamma_0}} \varepsilon_{\beta_0\beta_1\beta_2\beta_3} \right) dx^{\gamma_0} \wedge dx^{\beta_1} \wedge dx^{\beta_2} \wedge dx^{\beta_3} \right] (p) \quad (\text{A.14})$$

$$= \left[ \left( c_{\gamma_0\beta_1\beta_2\beta_3} + \frac{\sqrt{|g|}}{3!} g^{\alpha_0\beta_0} \frac{\partial b_{\alpha_0}}{\partial x^{\gamma_0}} \varepsilon_{\beta_0\beta_1\beta_2\beta_3} \right) \varepsilon^{\gamma_0\beta_1\beta_2\beta_3} d^n x \right] (p) \quad (\text{A.15})$$

$$= \left[ c_{\gamma_0\beta_1\beta_2\beta_3} \varepsilon^{\gamma_0\beta_1\beta_2\beta_3} d^n x + \frac{\sqrt{|g|}}{3!} g^{\alpha_0\beta_0} \frac{\partial b_{\alpha_0}}{\partial x^{\gamma_0}} \varepsilon_{\beta_0\beta_1\beta_2\beta_3} \varepsilon^{\gamma_0\beta_1\beta_2\beta_3} d^n x \right] (p) \quad (\text{A.16})$$

Ignoremos el primer sumando, puesto que se cancelará al evaluarse en  $p$ . Escribamos el segundo sumando en términos de la 1-forma diferencial de volumen para facilitar el cálculo del dual de Hodge posteriormente, siguiendo la definición 2.23.

$$\frac{\sqrt{|g|}}{3!} g^{\alpha_0\beta_0} \frac{\partial b_{\alpha_0}}{\partial x^{\gamma_0}} (\varepsilon_{\beta_0\beta_1\beta_2\beta_3} \varepsilon^{\gamma_0\beta_1\beta_2\beta_3}) d^n x = \frac{\sqrt{|g|}}{3!} g^{\alpha_0\beta_0} \frac{\partial b_{\alpha_0}}{\partial x^{\gamma_0}} (-3! \delta_{\beta_0}^{\gamma_0}) d^n x \quad (\text{A.17})$$

$$= \frac{1}{3!} g^{\alpha_0\beta_0} \frac{\partial b_{\alpha_0}}{\partial x^{\gamma_0}} (-3! \delta_{\beta_0}^{\gamma_0}) \underbrace{\sqrt{|g|} d^n x}_{dv_4} \quad (\text{A.18})$$

$$= -g^{\alpha_0\beta_0} \frac{\partial b_{\alpha_0}}{\partial x^{\beta_0}} dv_4. \quad (\text{A.19})$$

Sustituyendo este resultado en la expresión (A.16), se tiene

$$(d \star B)(p) = \left[ c_{\gamma_0\beta_1\beta_2\beta_3} \varepsilon^{\gamma_0\beta_1\beta_2\beta_3} d^n x - g^{\alpha_0\beta_0} \frac{\partial b_{\alpha_0}}{\partial x^{\beta_0}} dv_4 \right] (p). \quad (\text{A.20})$$

Ahora, calculemos el dual de Hodge, usando que, por definición,  $1 = \star dv_4$  y  $c_{\gamma_0\beta_1\beta_2\beta_3}(p) = 0$ ,

$$(\star d \star B)(p) = \left[ c_{\gamma_0\beta_1\beta_2\beta_3} \varepsilon^{\gamma_0\beta_1\beta_2\beta_3} \star (d^n x) - g^{\alpha_0\beta_0} \frac{\partial b_{\alpha_0}}{\partial x^{\beta_0}} \star (dv_4) \right] (p) \quad (\text{A.21})$$

$$= c_{\gamma_0\beta_1\beta_2\beta_3}(p) \varepsilon^{\gamma_0\beta_1\beta_2\beta_3} \star (d^n x) - \eta^{\alpha_0\beta_0} \frac{\partial b_{\alpha_0}}{\partial x^{\beta_0}}(p) \star (dv_4) = \quad (\text{A.22})$$

$$= -\eta^{\alpha_0\beta_0} \frac{\partial b_{\alpha_0}}{\partial x^{\beta_0}}(p). \quad (\text{A.23})$$

Comparando con la expresión (A.4) para  $(\nabla^\alpha b_\alpha)(p)$ , vemos que

$$(\nabla^\alpha b_\alpha)(p) = (-\star d \star B)(p). \quad (\text{A.24})$$

Como este argumento es válido para todo punto  $p \in M$ , esto completa la demostración  $\square$

## B. La invarianza Lorentz implica curvatura nula.

Sea  $\Lambda_{R(\vec{n})} \in L_+^\uparrow$  una transformación de Lorentz propia constituida por una rotación  $R(\vec{n})$  y un boost en una dirección arbitraria,  $\Lambda$ . Sin pérdida de generalidad, descartamos la rotación y consideramos el *boost* de Lorentz para una velocidad  $\vec{u}$  en un sistema de coordenadas cartesianas  $\{\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}\}$  con  $\hat{x} \parallel \vec{u}$ , dado por

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \begin{bmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (\text{B.1})$$

donde  $\beta = v/c$  y  $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$  son los factores relativistas clásicos. Ahora cabe preguntarse: ¿existen otras métricas que no sean de Minkowski que sean invariantes bajo transformaciones Lorentz? Supongamos que existe tal métrica  $g_{\alpha\beta}$ , la cual debe verificar

$$g_{\alpha\beta} = \Lambda^\mu{}_\alpha g_{\mu\nu} \Lambda^\nu{}_\beta = (\Lambda^\top)^\mu{}_\alpha g_{\mu\nu} \Lambda^\nu{}_\beta \implies \hat{g} = \hat{\Lambda}^\top \hat{g} \hat{\Lambda}. \quad (\text{B.2})$$

Suponiendo una métrica arbitraria, con sus 10 grados de libertad (recordemos que la métrica es simétrica,  $g_{\alpha\beta} = g_{\beta\alpha}$ ), la ecuación B.2 queda como

$$\begin{bmatrix} g_{00} & g_{01} & g_{02} & g_{03} \\ g_{01} & g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{02} & g_{12} & g_{22} & g_{23} \\ g_{03} & g_{13} & g_{23} & g_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-\beta g_{01} + \beta(\beta g_{11} - g_{01}) + g_{00}}{1 - \beta^2} & \frac{-\beta g_{11} + \beta(\beta g_{01} - g_{00}) + g_{01}}{1 - \beta^2} & \frac{-\beta g_{12} + g_{02}}{\sqrt{1 - \beta^2}} & \frac{-\beta g_{13} + g_{03}}{\sqrt{1 - \beta^2}} \\ \frac{-\beta g_{00} + \beta(\beta g_{01} - g_{11}) + g_{01}}{1 - \beta^2} & \frac{-\beta g_{01} + \beta(\beta g_{00} - g_{01}) + g_{11}}{1 - \beta^2} & \frac{-\beta g_{02} + g_{12}}{\sqrt{1 - \beta^2}} & \frac{-\beta g_{03} + g_{13}}{\sqrt{1 - \beta^2}} \\ \frac{-\beta g_{12} + g_{02}}{\sqrt{1 - \beta^2}} & \frac{-\beta g_{02} + g_{12}}{\sqrt{1 - \beta^2}} & g_{22} & g_{23} \\ \frac{-\beta g_{13} + g_{03}}{\sqrt{1 - \beta^2}} & \frac{-\beta g_{03} + g_{13}}{\sqrt{1 - \beta^2}} & g_{23} & g_{33} \end{bmatrix}$$

Igualando término a término, se obtienen 12 ecuaciones para 10 incógnitas que se pueden resolver usando cualquier programa de cálculo simbólico. En nuestro caso, se ha usado la librería **Sympy** para obtener la solución

$$g_{00} = -g_{11}, \quad g_{11} = g_{11}, \quad g_{22} = g_{22}, \quad g_{33} = g_{33} \quad \text{y} \quad g_{\alpha\beta} = 0 \quad \forall \alpha \neq \beta, \quad (\text{B.3})$$

Lo cual resulta en la métrica.

$$\hat{g} = \begin{bmatrix} -g_{00} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & g_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & g_{33} \end{bmatrix}. \quad (\text{B.4})$$

La forma de esta métrica nos recuerda a la de Minkowski, pero no necesariamente describe un espacio-tiempo plano, ya que los elementos independientes de la métrica pueden ser funciones escalares de la posición,  $g_{\kappa\kappa} = g_{\kappa\kappa}(x^\mu)$ , para  $\kappa = 1, 2, 3$ . Para demostrar que esto no puede ser el caso, recordemos que, por construcción, la métrica ha de ser invariante bajo transformaciones de Lorentz, esto es:

$$g_{\kappa\kappa}(x'^\alpha) = g_{\kappa\kappa}(\Lambda^\alpha{}_\beta x^\beta) = g_{\kappa\kappa}(x^\alpha). \quad (\text{B.5})$$

La dependencia en  $x^\alpha$  de las funciones  $g_{\kappa\kappa}(x^\alpha)$  puede ser únicamente del producto escalar consigo mismo, es decir  $g_{\kappa\kappa}(x^\alpha) := g_{\kappa\kappa}(x^\alpha x_\alpha)$ . Esto es así porque solamente hay dos tensores no nulos isotrópicos para el subgrupo de Lorentz propio, esto es, invariantes bajo transformaciones de Lorentz: la misma métrica  $g_{\mu\nu}$ , por construcción, y el tensor completamente antisimétrico  $\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$  [16]. Si expandimos  $g_{\kappa\kappa}$  en serie de Taylor:

$$g_{\kappa\kappa}(x^\alpha) = g_{\kappa\kappa}(0) + A_\alpha x^\alpha + B_{\alpha\beta} x^\alpha x^\beta + C_{\alpha\beta\gamma} x^\alpha x^\beta x^\gamma + D_{\alpha\beta\gamma\sigma} x^\alpha x^\beta x^\gamma x^\sigma + \dots \quad (\text{B.6})$$

Todos los coeficientes tienen que ser invariantes bajo transformaciones de Lorentz, por tanto tienen que ser contracciones de los tensores  $g_{\mu\nu}$  y  $\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ . El término  $g_{\kappa\kappa}(0)$  es escalar, por tanto siempre es invariante bajo transformaciones de Lorentz. Los coeficientes con índices impares han de ser nulos, puesto que no podemos construirlos a partir de  $g_{\mu\nu}$  y  $\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ , puesto que ambos tienen un número par de índices. El coeficiente  $B_{\alpha\beta}$  solo puede ser la métrica  $g_{\alpha\beta}$ , por tanto el término resultante  $B_{\alpha\beta} x^\alpha x^\beta$  es el producto escalar. Además, todos los coeficientes que deban incluir el tensor  $\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$  resultarán en términos nulos, ya que

$$\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} x^\mu x^\nu x^\rho x^\sigma = \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} x^\nu x^\mu x^\rho x^\sigma \implies \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} x^\mu x^\nu x^\rho x^\sigma = -\epsilon_{\nu\mu\rho\sigma} x^\nu x^\mu x^\rho x^\sigma. \quad (\text{B.7})$$

Intercambiando los índices mudos  $\mu \leftrightarrow \nu$  en el término de la derecha de la ecuación B.7 se llega a la expresión de la izquierda de la igualdad, por tanto

$$\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} x^\mu x^\nu x^\rho x^\sigma = 0 \quad (\text{B.8})$$

Esto implica que los coeficientes tensoriales de  $2n$  índices  $T_{i_1 i_2, i_3, \dots, i_{2n}}$  tienen que ser obligatoriamente productos tensoriales de  $n$  métricas,  $g_{i_1 i_2} g_{i_3 i_4} \dots g_{i_{2n-1} i_{2n}}$ , que al ser contraídos por  $2n$  vectores  $x^{i_1} x^{i_2} \dots x^{i_{2n}}$  resultan en  $(g_{\alpha\beta} x^\alpha x^\beta)^n$ : potencias del cuadrado de la norma. Todo esto implica que la dependencia de los elementos de matriz de la métrica debe ser  $g_{\kappa\kappa}(x^\alpha) := g_{\kappa\kappa}(g_{\alpha\beta} x^\alpha x^\beta)$ . Pero esto lleva a una definición circular, puesto que estaríamos usando la métrica para describir los elementos de la propia métrica, por tanto debemos descartar todos los términos de B.6 excepto la constante  $g_{\kappa\kappa}(0)$ . Queda por tanto demostrado que los elementos  $g_{\kappa\kappa}$ , para  $\kappa = 1, 2, 3$  son constantes. Para cerciorarnos de que esta métrica describe un espacio-tiempo plano, podemos calcular el escalar de Ricci,  $R$ , y comprobar

$$R = 0, \quad (\text{B.9})$$

lo cual es de esperar puesto que el espacio-tiempo descrito es Minkowski con una transformación de escala. Por tanto, hemos deducido que de ser válidas las transformaciones de Lorentz en un espacio-tiempo, este debe de ser necesariamente de Minkowski, por tanto, no habrá gravedad.

### C. Detalle en el cálculo de las Ecuaciones de Maxwell

En este apéndice se detallan los cálculos omitidos al calcular la derivadas exteriores en las ecuaciones de Maxwell en la sección §3.6. Para la primera ecuación de Maxwell, calculamos  $dF$ ,

$$dF = d(-E_x dt \wedge dx - E_y dt \wedge dy - E_z dt \wedge dz + B_z dx \wedge dy - B_y dx \wedge dz + B_x dy \wedge dz.) \quad (C.1)$$

Usando la derivada exterior en el sistema de coordenadas  $\{t, x, y, z\}$ ,

$$\begin{aligned} dF = & -\partial_y E_x dy \wedge dt \wedge dx - \partial_z E_x dz \wedge dt \wedge dx \\ & -\partial_x E_y dx \wedge dt \wedge dy - \partial_z E_y dz \wedge dt \wedge dy \\ & -\partial_x E_z dx \wedge dt \wedge dz - \partial_y E_z dy \wedge dt \wedge dz \\ & +\partial_t B_z dt \wedge dx \wedge dy + \partial_z B_z dz \wedge dx \wedge dy \\ & -\partial_t B_y dt \wedge dx \wedge dz - \partial_y B_y dy \wedge dx \wedge dz \\ & +\partial_t B_x dt \wedge dy \wedge dz + \partial_x B_x dx \wedge dy \wedge dz. \end{aligned}$$

Usando la propiedad (b) del Lema 2.15, permutamos las 1-formas base que conforman las 3-formas para que estén en orden  $dt \rightarrow dx \rightarrow dy \rightarrow dz$ :

$$\begin{aligned} dF = & -\partial_y E_x dt \wedge dx \wedge dy - \partial_z E_x dt \wedge dx \wedge dz \\ & +\partial_x E_y dt \wedge dx \wedge dy - \partial_z E_y dt \wedge dy \wedge dz \\ & +\partial_x E_z dt \wedge dx \wedge dz + \partial_y E_z dt \wedge dy \wedge dz \\ & +\partial_t B_z dt \wedge dx \wedge dy + \partial_z B_z dx \wedge dy \wedge dz \\ & -\partial_t B_y dt \wedge dx \wedge dz + \partial_y B_y dx \wedge dy \wedge dz \\ & +\partial_t B_x dt \wedge dy \wedge dz + \partial_x B_x dx \wedge dy \wedge dz. \end{aligned}$$

Agrupando, llegamos a la expresión:

$$\begin{aligned} dF = & (\partial_t B_z + \partial_x E_y - \partial_y E_x) dt \wedge dx \wedge dy - (\partial_t B_y + \partial_z E_x - \partial_x E_z) dt \wedge dx \wedge dz \\ & + (\partial_t B_x + \partial_y E_z - \partial_z E_y) dt \wedge dy \wedge dz + (\partial_x B_x + \partial_y B_y + \partial_z B_z) dx \wedge dy \wedge dz \end{aligned}$$

Para la segunda,  $d \star F$ ,

$$d \star F = d(E_x dy \wedge dz - E_y dx \wedge dz + E_z dx \wedge dy + B_z dt \wedge dz + B_y dt \wedge dy + B_x dt \wedge dx). \quad (C.2)$$

Nuevamente, aplicando la derivada exterior,

$$\begin{aligned} d \star F = & +\partial_t E_x dt \wedge dy \wedge dz + \partial_x E_x dx \wedge dy \wedge dz \\ & -\partial_t E_y dt \wedge dx \wedge dz - \partial_y E_y dy \wedge dx \wedge dz \\ & +\partial_t E_z dt \wedge dx \wedge dy + \partial_z E_z dz \wedge dx \wedge dy \\ & +\partial_x B_z dx \wedge dt \wedge dz + \partial_y B_z dy \wedge dt \wedge dz \\ & +\partial_x B_y dx \wedge dt \wedge dy + \partial_z B_y dz \wedge dt \wedge dy \\ & +\partial_y B_x dy \wedge dt \wedge dx + \partial_z B_x dz \wedge dt \wedge dx. \end{aligned}$$

Usando la propiedad (b) del Lema 2.15, permutamos las 1-formas base que conforman las 3-formas para que estén en orden  $dt \rightarrow dx \rightarrow dy \rightarrow dz$ :

$$d \star F = \partial_t E_x dt \wedge dy \wedge dz + \partial_x E_x dx \wedge dy \wedge dz \quad (\text{C.3})$$

$$- \partial_t E_y dt \wedge dx \wedge dz + \partial_y E_y dx \wedge dy \wedge dz \quad (\text{C.4})$$

$$+ \partial_t E_z dt \wedge dx \wedge dy + \partial_z E_z dx \wedge dy \wedge dz \quad (\text{C.5})$$

$$- \partial_x B_z dt \wedge dx \wedge dz - \partial_y B_z dt \wedge dy \wedge dz \quad (\text{C.6})$$

$$- \partial_x B_y dt \wedge dx \wedge dy + \partial_z B_y dt \wedge dy \wedge dz \quad (\text{C.7})$$

$$+ \partial_y B_x dt \wedge dx \wedge dy + \partial_z B_x dt \wedge dx \wedge dz. \quad (\text{C.8})$$

Agrupando, llegamos a la expresión

$$\begin{aligned} d \star F = & (\partial_t E_z + \partial_y B_x - \partial_x B_y) dt \wedge dx \wedge dy - (\partial_t E_y + \partial_x B_x - \partial_z B_x) dt \wedge dx \wedge dz \\ & + (\partial_t E_x + \partial_z B_y - \partial_y B_z) dt \wedge dy \wedge dz + (\partial_x E_x + \partial_y E_y + \partial_z E_z) dx \wedge dy \wedge dx, \end{aligned} \quad (\text{C.9})$$

que es a lo que se deseaba llegar.

## D. Cálculos de variaciones explícitos para la acción de Einstein-Hilbert

El objetivo de este apéndice es explicitar los cálculos que se han omitido aplicando el principio de Hamilton a la variación de Einstein-Hilbert. Se sigue la línea de [10] para el determinante de la métrica y [4] para el resto de cálculos.

### D.1. Conexión afín

Para calcular como varía la conexión afín con la métrica, consideremos un tensor arbitrario  $\delta T_{\mu\nu} = \tilde{T}_{\mu\nu} - T_{\mu\nu}$  y calculemos su derivada covariante

$$\nabla_\lambda T_{\mu\nu} = \partial_\lambda T_{\mu\nu} - \Gamma^\rho_{\mu\lambda} \delta T_{\rho\nu} - \Gamma^\rho_{\lambda\nu} \delta T_{\mu\rho}. \quad (\text{D.1})$$

Ya que  $\delta T_{\mu\nu}$  es una resta, las derivadas  $\partial_\lambda$  conmutan con la diferencia  $\delta$ . Además, aplicando la regla de Leibniz, se tiene que  $\delta(\Gamma^\rho_{\mu\lambda} T_{\rho\nu}) = \delta\Gamma^\rho_{\mu\lambda} T_{\rho\nu} + \Gamma^\rho_{\mu\lambda} \delta T_{\rho\nu}$ , por tanto podemos expresar la igualdad anterior como

$$\nabla_\lambda T_{\mu\nu} = \delta \left( \partial_\lambda g_{\mu\nu} - \Gamma^\rho_{\mu\lambda} T_{\rho\nu} - \Gamma^\rho_{\lambda\nu} T_{\mu\rho} \right) + \delta\Gamma^\rho_{\mu\lambda} T_{\rho\nu} - \delta\Gamma^\rho_{\lambda\nu} T_{\mu\rho} \quad (\text{D.2})$$

$$= \delta(\nabla_\lambda T_{\mu\nu}) + \delta\Gamma^\rho_{\mu\lambda} T_{\rho\nu} - \delta\Gamma^\rho_{\lambda\nu} T_{\mu\rho} \quad (\text{D.3})$$

Si en esta expresión se elige como tensor la métrica, es decir  $T_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}$ , entonces por construcción  $\nabla_\lambda g_{\mu\nu} = 0$  y en consecuencia

$$\nabla_\lambda g_{\mu\nu} = +\delta\Gamma^\rho_{\mu\lambda} g_{\rho\nu} - \delta\Gamma^\rho_{\lambda\nu} g_{\mu\rho}. \quad (\text{D.4})$$

Ahora, es conveniente aplicar el *truco* de sumar y restar esta cantidad con los índices permutados, para encontrar

$$\nabla_\mu \delta g_{\nu\lambda} + \nabla_\nu \delta g_{\lambda\mu} - \nabla_\lambda \delta g_{\mu\nu} = 2g_{\lambda\rho} \delta\Gamma^\rho_{\nu\mu}. \quad (\text{D.5})$$

Si contraemos en ambos lados de la igualdad por la métrica (inversa)  $g^{\lambda\rho}$ , llegamos a la expresión deseada,

$$\delta\Gamma^\rho_{\nu\mu} = \frac{1}{2} g^{\lambda\rho} (\nabla_\mu \delta g_{\nu\lambda} + \nabla_\nu \delta g_{\lambda\mu} - \nabla_\lambda \delta g_{\mu\nu}). \quad (\text{D.6})$$

### D.2. Curvatura escalar

Para obtener la variación de la curvatura escalar con la métrica, partimos del tensor de curvatura de Riemann, el cual se define como

$$R^\rho_{\sigma\mu\nu} = \partial_\mu \Gamma^\rho_{\nu\sigma} - \partial_\nu \Gamma^\rho_{\mu\sigma} + \Gamma^\rho_{\mu\lambda} \Gamma^\lambda_{\nu\sigma} - \Gamma^\rho_{\nu\lambda} \Gamma^\lambda_{\mu\sigma}. \quad (\text{D.7})$$

Al variar la métrica una cantidad  $\delta g_{\mu\nu}$ , la conexión también varía una cantidad  $\delta\Gamma^\rho_{\nu\sigma}$ , aunque calcular esta cantidad no es estrictamente necesario para nuestro propósito. La variación es, por tanto

$$\delta R^\rho_{\sigma\mu\nu} = \partial_\mu \delta\Gamma^\rho_{\nu\sigma} - \partial_\nu \delta\Gamma^\rho_{\mu\sigma} + \delta\Gamma^\rho_{\mu\lambda} \Gamma^\lambda_{\nu\sigma} + \Gamma^\rho_{\mu\lambda} \delta\Gamma^\lambda_{\nu\sigma} - \delta\Gamma^\rho_{\nu\lambda} \Gamma^\lambda_{\mu\sigma} - \Gamma^\rho_{\nu\lambda} \delta\Gamma^\lambda_{\mu\sigma}. \quad (\text{D.8})$$

Reorganizando los términos y usando la propiedad de los símbolos de Christoffel  $\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha = \Gamma_{\gamma\beta}^\alpha$ , se puede observar que esta expresión es la diferencia entre dos derivadas covariantes del tensor  $\delta\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha$ , esto es:

$$\delta R_{\sigma\mu\nu}^\rho = \underbrace{\partial_\mu \delta\Gamma_{\nu\sigma}^\rho + \Gamma_{\lambda\nu}^\rho \delta\Gamma_{\nu\sigma}^\lambda - \Gamma_{\sigma\mu}^\lambda \delta\Gamma_{\nu\lambda}^\rho}_{\nabla_\mu \delta\Gamma_{\nu\sigma}^\rho + \Gamma_{\nu\mu}^\lambda \delta\Gamma_{\sigma\lambda}^\rho} - \underbrace{\left( \partial_\nu \delta\Gamma_{\mu\sigma}^\rho + \Gamma_{\nu\lambda}^\rho \delta\Gamma_{\mu\sigma}^\lambda - \Gamma_{\nu\sigma}^\lambda \delta\Gamma_{\mu\lambda}^\rho \right)}_{\nabla_\nu \delta\Gamma_{\mu\sigma}^\rho + \Gamma_{\nu\mu}^\lambda \delta\Gamma_{\sigma\lambda}^\rho} \quad (\text{D.9})$$

$$= \nabla_\mu \delta\Gamma_{\nu\sigma}^\rho - \nabla_\nu \delta\Gamma_{\mu\sigma}^\rho. \quad (\text{D.10})$$

Ahora, usamos la definición del tensor de Ricci a partir del tensor de Riemann, esto es, contraer los índices  $R_{\alpha\beta} = R_{\alpha\sigma\beta}^\sigma = R_{\beta\sigma\alpha}^\sigma$  para obtener la variación del tensor de Ricci. En *román paladino*, ponemos  $\mu = \rho$

$$\delta R_{\sigma\nu} = \nabla_\mu \delta\Gamma_{\nu\sigma}^\mu - \nabla_\nu \delta\Gamma_{\mu\sigma}^\mu. \quad (\text{D.11})$$

A su vez, el escalar de Ricci es la contracción del tensor de Ricci con la métrica, por tanto obtener su variación implica también tener en cuenta la variación de la métrica,

$$R = g^{\sigma\nu} R_{\sigma\nu} \implies \delta R = \delta g^{\sigma\nu} R_{\sigma\nu} + g^{\sigma\nu} \delta R_{\sigma\nu} \quad (\text{D.12})$$

Obtener una expresión para el segundo término requiere del uso de la compatibilidad de la métrica con la derivada covariante, esto es  $\nabla_\mu g^{\sigma\nu} = 0$  y de algo de gimnasia con los índices:

$$g^{\sigma\nu} \delta R_{\sigma\nu} = g^{\sigma\nu} \nabla_\mu (\delta\Gamma_{\nu\sigma}^\mu) - g^{\sigma\nu} \nabla_\nu (\delta\Gamma_{\mu\sigma}^\mu) \quad (\text{D.13})$$

$$= \nabla_\mu (g^{\sigma\nu} \delta\Gamma_{\nu\sigma}^\mu) - \nabla_\nu (g^{\sigma\nu} \delta\Gamma_{\mu\sigma}^\mu) \quad (\text{D.14})$$

$$= \nabla_\mu (g^{\sigma\nu} \delta\Gamma_{\nu\sigma}^\mu - g^{\sigma\mu} \delta\Gamma_{\nu\sigma}^\nu) \quad (\text{D.15})$$

dónde se ha hecho el intercambio de índices  $\mu \leftrightarrow \nu$  en el segundo sumando tras meter la métrica en la derivada covariante. Finalmente, hemos llegado a la expresión para la variación de la curvatura escalar en función de la variación de la conexión:

$$\delta R = \delta g^{\sigma\nu} R_{\sigma\nu} + \nabla_\mu (g^{\sigma\nu} \delta\Gamma_{\nu\sigma}^\mu - g^{\sigma\mu} \delta\Gamma_{\nu\sigma}^\nu) \quad (\text{D.16})$$

Si se desea, se puede usar la fórmula explícita para  $\delta\Gamma_{\nu\sigma}^\mu$ , la expresión (D.6) y operar en el segundo sumando del lado derecho de la igualdad (D.16),

$$\nabla_\mu (g^{\sigma\nu} \delta\Gamma_{\nu\sigma}^\mu - g^{\sigma\mu} \delta\Gamma_{\nu\sigma}^\nu) = \frac{1}{2} \nabla_\mu [g^{\sigma\nu} g^{\lambda\mu} (\nabla_\sigma \delta g_{\nu\lambda} + \nabla_\nu \delta g_{\lambda\sigma} - \nabla_\lambda \delta g_{\sigma\nu}) \quad (\text{D.17})$$

$$- g^{\sigma\mu} \delta g^{\lambda\nu} (\nabla_\sigma \delta g_{\mu\lambda} + \nabla_\mu \delta g_{\lambda\sigma} - \nabla_\lambda \delta g_{\sigma\mu})]. \quad (\text{D.18})$$

Si se contraen las derivadas covariantes con la métrica, la expresión anterior se reduce a

$$\nabla_\mu (g^{\sigma\nu} \delta\Gamma_{\nu\sigma}^\mu - g^{\sigma\mu} \delta\Gamma_{\nu\sigma}^\nu) = + \frac{1}{2} \nabla^\lambda (\nabla^\nu \delta g_{\nu\lambda} + \nabla^\sigma \delta g_{\lambda\sigma} - \nabla^\nu \delta g_{\sigma\nu}) \quad (\text{D.19})$$

$$- \frac{1}{2} \nabla^\sigma (\nabla_\sigma g^{\lambda\nu} \delta_{\nu\lambda} + \nabla^\nu \delta g_{\lambda\sigma} - \nabla^\nu \delta g_{\sigma\nu}) \quad (\text{D.20})$$

Cambiando los índices de cada sumando para que sean iguales, se llega a la expresión

$$\nabla_\mu (g^{\sigma\nu} \delta\Gamma_{\nu\sigma}^\mu - g^{\sigma\mu} \delta\Gamma_{\nu\sigma}^\nu) = \nabla^\sigma \nabla_\sigma g^{\lambda\nu} \delta g_{\lambda\nu} + \nabla^\sigma \nabla^\lambda \delta g_{\sigma\lambda} = \nabla^\sigma \left( \nabla_\sigma g^{\lambda\nu} \delta g_{\lambda\nu} + \nabla^\lambda \delta g_{\sigma\lambda} \right), \quad (\text{D.21})$$

que, al ser sustituida en la igualdad D.16, nos permite llegar a la expresión de la variación del escalar de Ricci,

$$\delta R = R_{\sigma\nu} \delta g^{\sigma\nu} + \nabla^\sigma \left( \nabla_\sigma g^{\lambda\nu} \delta g_{\lambda\nu} + \nabla^\lambda \delta g_{\sigma\lambda} \right) \quad (\text{D.22})$$

### D.3. Determinante de la métrica

Comencemos demostrando que la variación del determinante de la métrica respecto a la métrica es

$$\frac{\delta \det(g)}{\delta g^{\alpha\beta}} = -\det(g)g_{\alpha\beta}. \quad (\text{D.23})$$

Vamos a comenzar demostrando que para toda matriz cuadrada  $A$ , de dimensión  $d$ , se tiene  $\det(I_d + \epsilon A) = 1 + \epsilon \text{Tr}(A) + \mathcal{O}(\epsilon^2)$ , donde  $I_d$  es la identidad. Sean  $\{\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \dots, \mathbf{A}_d\}$  los vectores columna de una matriz cuadrada  $d \times d$ . Sea  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_d\}$  la base canónica de  $\mathbb{R}^d$ . El determinante de una matriz  $A$  es una función multilinear de los vectores columna de una matriz,

$$\det: \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \times \dots \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R} \quad (\text{D.24})$$

$$(\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \dots, \mathbf{A}_d) \mapsto \det(\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \dots, \mathbf{A}_d) := \det(A) \quad (\text{D.25})$$

Con esto en mente, podemos escribir

$$\det(I_d + \epsilon A) = \det(\mathbf{e}_1 + \epsilon \mathbf{A}_1, \mathbf{e}_2 + \epsilon \mathbf{A}_2, \dots, \mathbf{e}_d + \epsilon \mathbf{A}_d) \quad (\text{D.26})$$

Con esta interpretación, expandimos en serie de Taylor alrededor de los vectores  $\{\mathbf{e}_i\}$  hasta llegar a términos de orden  $\epsilon^2$ :

$$\begin{aligned} \det(I_d + \epsilon A) = & \det(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_d) + \\ & \epsilon [\det(\mathbf{A}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_d) + \det(\mathbf{e}_1, \mathbf{A}_2, \dots, \mathbf{e}_d) + \dots + \det(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{A}_d)] + \mathcal{O}(\epsilon^2) \end{aligned}$$

Ahora bien, si desarrollamos un determinante del tipo  $\det(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{A}_i, \dots, \mathbf{e}_d)$  por la  $i$ -ésima columna, tenemos que

$$\det(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{A}_i, \dots, \mathbf{e}_d) = A_{ii} \det(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{i-1}, \mathbf{e}_{i+1}, \dots, \mathbf{e}_d) = A_{ii} \det(I_{d-1}) = A_{ii} \quad (\text{D.27})$$

dónde  $A_{ii}$  es un elemento de matriz. Finalmente, demostramos el resultado,

$$\det(I_d + \epsilon A) = 1 + \epsilon \sum_{n=1}^d A_{nn} + \mathcal{O}(\epsilon^2) = 1 + \text{Tr}(A) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \quad (\text{D.28})$$

Este resultado es crucial, porque podemos considerar ahora, para dos matrices cuadradas  $A$  y  $B$ ,

$$\left. \frac{d}{d\epsilon} \det(A + \epsilon B) \right|_{\epsilon=0} = \left. \frac{d}{d\epsilon} \det(A) \det(1 + \epsilon A^{-1} B) \right|_{\epsilon=0} \quad (\text{D.29})$$

$$= \det(A) \left. \frac{d}{d\epsilon} [1 + \text{Tr}(A^{-1} B) + \mathcal{O}(\epsilon^2)] \right|_{\epsilon=0} \quad (\text{D.30})$$

$$= \det(A) \text{Tr}(A^{-1} B). \quad (\text{D.31})$$

Si en este resultado ponemos  $A_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}$ , la métrica y  $B_{\mu\nu} = \delta g_{\mu\nu}$ , llegamos a un resultado de amplia utilidad.

$$\delta \det(g) = \det(g) \text{Tr}(g^{-1} \delta g) = \det(g) g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} \quad (\text{D.32})$$

Cabe destacar que en esta expresión el determinante solo varía cuando varía  $g_{\mu\nu}$  y no  $g^{\mu\nu}$  porque la métrica y su inversa están relacionadas. Concretamente,  $g^{\mu\nu} g_{\mu\nu} = n$  en una  $n$ -variedad, y esta cantidad no cambia con la métrica. Por tanto

$$\delta n = 0 \implies \delta(g^{\mu\nu} g_{\mu\nu}) = 0 \implies g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} = -g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}. \quad (\text{D.33})$$

En términos de la variación de la métrica inversa  $g^{\mu\nu}$ , la variación del determinante queda

$$\delta \det(g) = -\det(g) g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \quad (\text{D.34})$$

#### D.4. Lagrangiano electromagnético

El último cálculo de este apéndice consiste en obtener la cantidad

$$\frac{\delta \mathcal{L}_{EM}}{\delta g^{\mu\nu}} = \frac{\delta}{\delta g^{\mu\nu}} \left( -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - A_\mu J^\mu \right). \quad (\text{D.35})$$

Para ello, vamos a bajar índices con la métrica y tomar sus respectivas variaciones en el denominador

$$\delta \left( -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} F_{\alpha\beta} - A_\mu g^{\mu\alpha} J_\alpha \right) = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} g^{\mu\alpha} F_{\alpha\beta} \delta g^{\nu\beta} - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} g^{\nu\beta} F_{\alpha\beta} \delta g^{\mu\alpha} - A_\mu J_\alpha \delta g^{\mu\alpha} \quad (\text{D.36})$$

$$= -\frac{1}{4} F_{\nu\mu} g^{\nu\beta} F_{\beta\alpha} \delta g^{\mu\alpha} - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} g^{\nu\beta} F_{\alpha\beta} \delta g^{\mu\alpha} - A_\mu J_\alpha \delta g^{\mu\alpha} \quad (\text{D.37})$$

$$= \left[ -\frac{1}{4} (F_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} + F_{\nu\mu} F_{\beta\alpha}) g^{\nu\beta} - A_\mu J_\alpha \right] \delta g^{\mu\alpha} \quad (\text{D.38})$$

$$= \left[ -\frac{1}{4} (F_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} + (-F_{\mu\nu})(-F_{\alpha\beta})) g^{\nu\beta} - A_\mu J_\alpha \right] \delta g^{\mu\alpha} \quad (\text{D.39})$$

$$= \left( -\frac{1}{2} F_{\mu\nu} g^{\nu\beta} F_{\alpha\beta} - A_\mu J_\alpha \right) \delta g^{\mu\alpha} \quad (\text{D.40})$$

donde en primer sumando del lado derecho de la igualdad D.36 se han intercambiado los índices mudos  $\beta \leftrightarrow \alpha$  y  $\mu \leftrightarrow \nu$  y en el paso D.38 se ha aplicado la antisimetría total del tensor de Faraday,  $F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu}$ . Ahora, para poder calcular el cociente, hacemos otro cambio de índices, concretamente  $\alpha \leftrightarrow \nu$ , de manera que D.40 queda

$$\left( -\frac{1}{2} F_{\mu\alpha} g^{\alpha\beta} F_{\nu\beta} - A_\mu J_\nu \right) \delta g^{\mu\nu}. \quad (\text{D.41})$$

Finalmente, obtenemos la expresión deseada,

$$\frac{\delta \mathcal{L}_{EM}}{\delta g^{\mu\nu}} = -\frac{1}{2} F_{\mu\alpha} g^{\alpha\beta} F_{\nu\beta} - A_\mu J_\nu = -\frac{1}{2} F_{\mu\alpha} F_\nu^\alpha - A_\mu J_\nu \quad (\text{D.42})$$

## Referencias

- [1] Florian Scheck (auth.) *Classical Field Theory: On Electrodynamics, Non-Abelian Gauge Theories and Gravitation*. 1.<sup>a</sup> ed. Graduate Texts in Physics. Springer, 2012. ISBN: 3642279856; 9783642279843; 3642279848; 9783642279850.
- [2] Matthias Blau. *Lecture Notes on General Relativity*. Albert Einstein Center for Fundamental Physics, 2023. URL: <http://www.blau.itp.unibe.ch/newlecturesGR.pdf>.
- [3] David Bleeker. *Gauge theory and variational principles*. Global analysis, pure and applied 1. Addison-Wesley Pub. Co., Advanced Book Program/World Science Division, 1981. ISBN: 0201100967; 9780201100969.
- [4] John Archibald Wheeler Charles W. Misner Kip S. Thorne. *Gravitation*. First Edition. Physics Series. W. H. Freeman, 1973. ISBN: 0716703440, 0716703343.
- [5] The Event Horizon Telescope Collaboration et al. «First Sagittarius A\* Event Horizon Telescope Results. VII. Polarization of the Ring». En: *The Astrophysical Journal Letters* 964.2 (mar. de 2024), pág. L25. DOI: 10.3847/2041-8213/ad2df0. URL: <https://dx.doi.org/10.3847/2041-8213/ad2df0>.
- [6] Professor Antoine Van Proeyen Daniel Z. Freedman. *Supergravity*. 1.<sup>a</sup> ed. Cambridge University Press, 2012. ISBN: 0521194016; 9780521194013.
- [7] Tevian Dray. *The Hodge Dual Operator*. 1999. URL: <https://sites.science.oregonstate.edu/~tevian/onid/Courses/MTH434/2009/dual.pdf>.
- [8] Harley Flanders. *Differential Forms with Applications to the Physical Sciences*. Mathematics in Science and Engineering 11. Dover Publications, 1963. ISBN: 9780486661698.
- [9] David J. Griffiths. *Introduction to Electrodynamics*. 4th. Pearson Education, 2012. ISBN: 0321856562,9780321856562.
- [10] Javier P. Muniain John C. Baez. *Gauge theories, knots, and gravity*. Series on Knots and Everything, Vol. 4. World Scientific Publishing Company, 1994. ISBN: 9810220340; 9789810220341.
- [11] Barrett O'Neill. *Semi-Riemannian Geometry With Applications to Relativity*. 1.<sup>a</sup> ed. Pure and Applied Mathematics, Volume 103. Academic Press, 1983. ISBN: 978-0-12-526740-3,0-12-526740-1.
- [12] James Vickers Ray d'Inverno. *Introducing Einstein's Relativity: A Deeper Understanding*. 2.<sup>a</sup> ed. Oxford University Press, 2021. ISBN: 0198862024,9780198862024.
- [13] D V Redžić. «Are Maxwell's equations Lorentz-covariant?» En: *European Journal of Physics* 38.1 (oct. de 2016), pág. 015602. ISSN: 1361-6404. DOI: 10.1088/0143-0807/38/1/015602. URL: <http://dx.doi.org/10.1088/0143-0807/38/1/015602>.
- [14] Alfred Schild. «Equivalence principle and red-shift measurements». En: *American Journal of Physics* 28.9 (dic. de 1960), págs. 778-780. DOI: 10.1119/1.1936000.
- [15] Walter E. Thirring. *A Course in Mathematical Physics II: Classical Field Theory (Course in Mathematical Physics)*. 1979. ISBN: 0387815325; 9780387815329.
- [16] Robin Ticciati. *Quantum Field Theory for Mathematicians*. Encyclopedia of Mathematics and its Applications. Cambridge University Press, 1999. ISBN: 052163265X; 9780521632652.
- [17] Pierre Touboul et al. «MICROSCOPE Mission: Final Results of the Test of the Equivalence Principle». En: *Phys. Rev. Lett.* 129 (12 sep. de 2022), pág. 121102. DOI: 10.1103/PhysRevLett.129.121102. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.129.121102>.

- [18] Wu-Ki Tung. *Group Theory in Physics*. World Scientific Publishing, 1985. ISBN: 9971966565; 9789971966560; 9971966573; 9789971966577.
- [19] F. R. Miller W. D. Curtis. *Differential manifolds and theoretical physics, Volume 116*. First Edition. Pure and Applied Mathematics. Academic Press, 1985. ISBN: 0-12-200230-X.